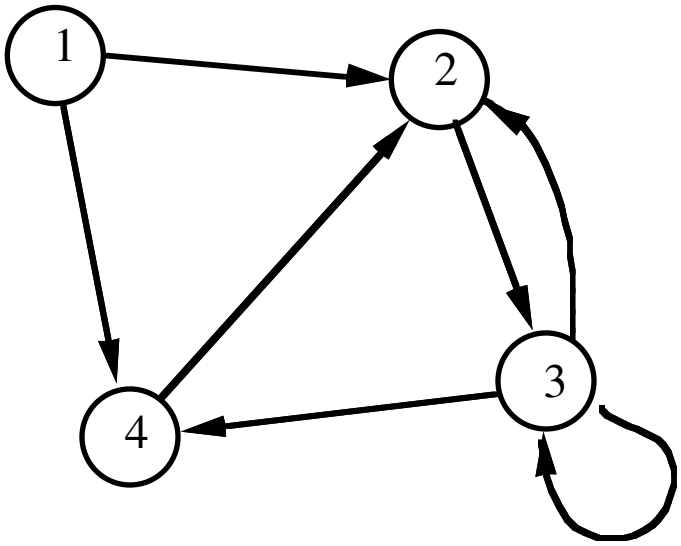
© April 28, 1996 Itai

Graphs גרפים

גרף (מכוון) $G=(V,E)$ מורכב מ-
- **קבוצת צמתים V**
- **קבוצת קשתות $E \subseteq V \times V$**

<u>דוגמא</u>



$V = \{1,2,3,4\}$
$E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,2), (3,3)\}$

חוג עצמי

<u>נסמן</u> $n = |V|$
$m = |E|$

בדוגמא $n = 4$, $m = 7$

תמיד מתקיים $m \leq n^2$.

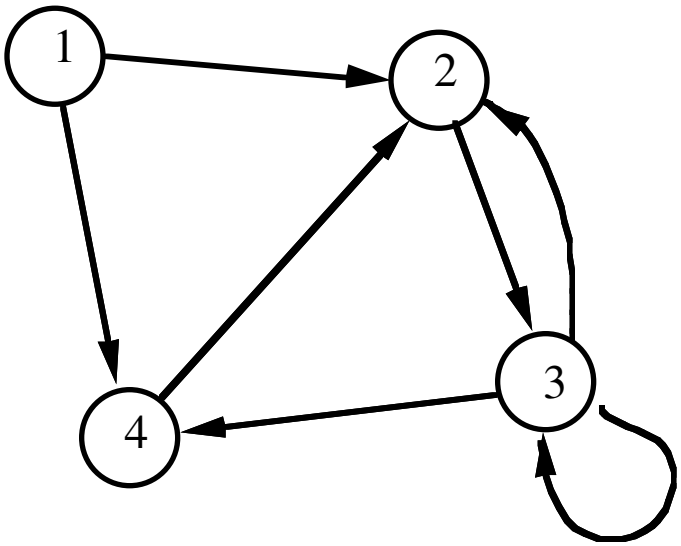
ייצוג גרפים

א. מטריצת סמיכויות (adjacency matrix)

נגדיר מטריצה A מגודל $n \times n$.

$$A[i, j] = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E$$

דוגמא

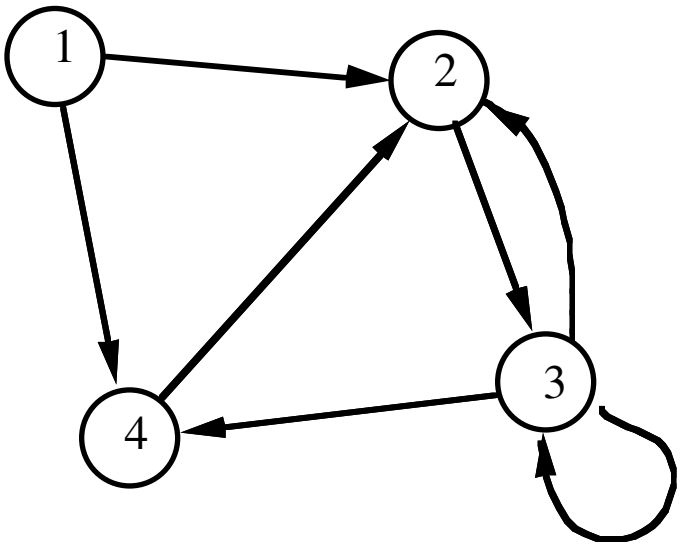


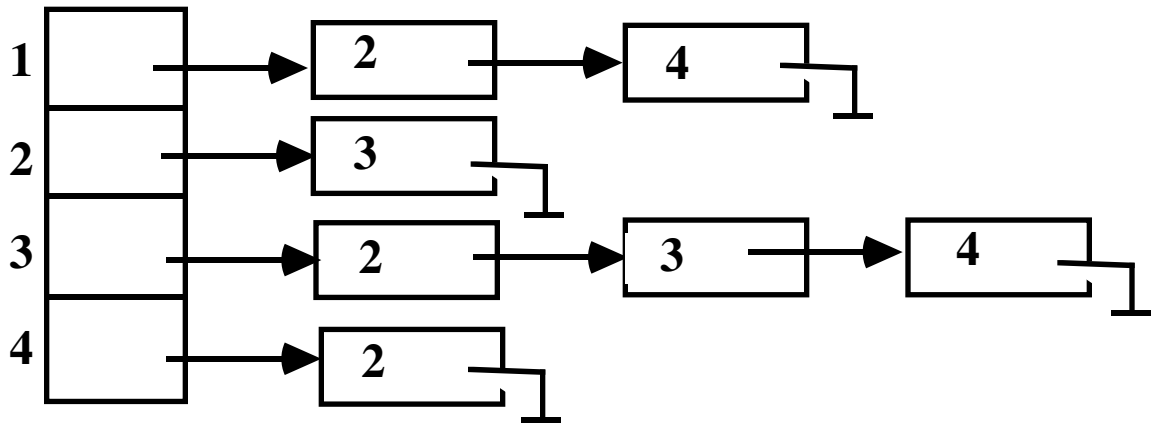
	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	1	0	0

ב. רשימות סמיכויות (Adjacency lists)

לכל צומת נשמור רשימה של כל הצמתים שסמוכים אליו.

<u>דוגמא</u>



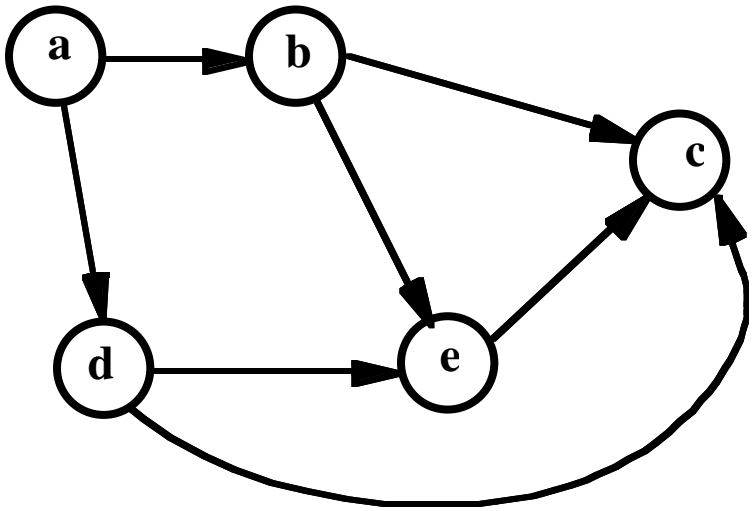


בעיה: נתונה רשימה לא ממוינת של קשתות
עליכם להרכיב רשימות סמיכויות ממוינות בזמן O(n + m)

מיון טופולוגי

<u>נתון</u>: גרף מכוון.
מספר מחדש את הצמתים כך ש-

$$(i, j) \in E \quad \Rightarrow \quad N[i] < N[j]$$



	N
a	0
b	1
c	4
d	2
e	3

מתי זה ניתן?

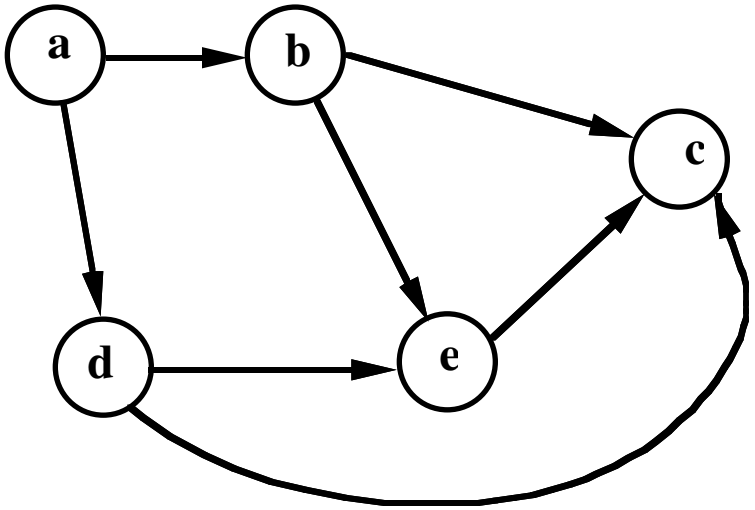
<u>הגדרה</u>: <u>מקור</u> הוא צומת שלא נכנסות אליו קשתות.

<u>אלגוריתם</u>

1. איתחול: k = 0

2. כל עוד קיימים מקורות
2.1 יהי v מקור.
2.2 תן ל-v מספר k, וקדם את k.
2.3 סלק את v וכל הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף.

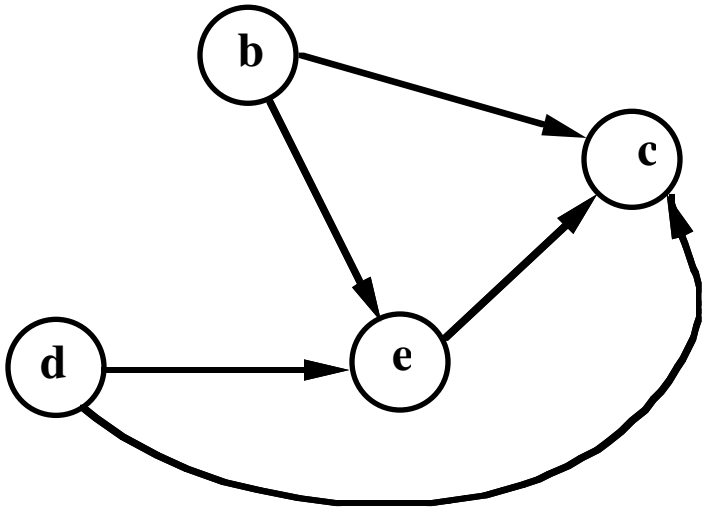
3. אם k == n האלג' הצליח,
אחרת הוא נכשל.



דוגמא

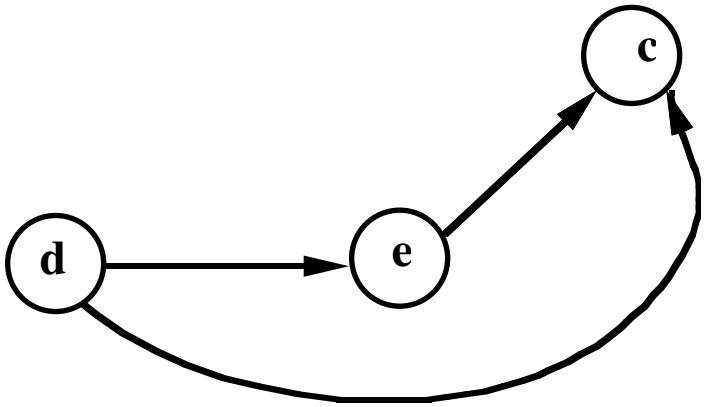
k = 0
v = a

N[a] = 0



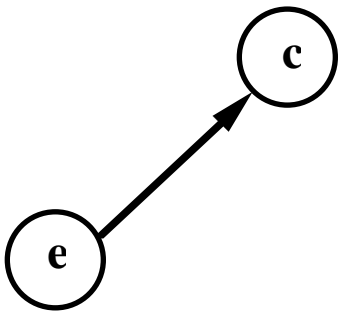
k = 1
v = b

N[b] = 1



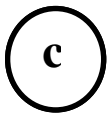
k = 2
v = d

N[d] = 2



k = 3
v = e

N[e] = 3



k = 4
v = c

N[c] = 4

מבני נתונים

הפעולות:

- מצא מקור
- עדכן את הגרף (סלק צומת)

מימוש

1. מטריצת סמיכויות

כדי לבדוק אם צומת i מקור - נסתכל על עמודה i
זמן O(n)
כדי למצוא מקור, נבדוק את כל הצמתים
זמן $O(n^2)$
כדי לסלק צומת i נאפס שורה i + ...
זמן O(n)

סה"כ זמן $O(n^3)$

<u>שיפור</u>:
שמור את מספר הקשתות שנכנסות in_degree[i]

כדי לבדוק אם צומת i מקור - נסתכל על in_degree[i]
זמן O(1)
למצוא מקור -- זמן O(n)

כדי לסלק צומת i נאפס שורה i
ולכל A[i, j] == 1 נקטין את in_degree[j]
זמן O(n)

סה"כ זמן $O(n^2)$

2. רשימת סמיכויות

לבדוק אם i מקור - צריך לעבור על כל רשימות הסמיכויות
זמן O(m)
למצוא מקור -- זמן O(mn)
כל האלגוריתם -- זמן $O(mn^2)$

שיפור: שמירת in_degree[i]

איתחול:
בונים את in_degree -- זמן O(n+m)

צעד i:
מציאת מקור v_i -- O(n)
מעבר על רשימת הסמיכויות של v_i -- $O(out_degree[v_i])$

סה"כ

$$\sum_i O(n + out_degree[v_i]) = O(n^2 + m)$$

שיפור נוסף:
נשמור את כל הצמתים בעלי in_degree = 0
ברשימה (תור או מחסנית).

מציאת מקור O(1)

כל האלגוריתם O(n+m)

סדר חלקי

1. **אנטי-סימטריה: לא מתקיים גם $x < y$ וגם $y < x$**
2. **אי-רפלקסיביות: לאף x לא מתקיים $x < x$**
3. **טרנזיטיביות: $x < y \,,\; y < z \;\Rightarrow\; x < z$**

בעיה

בהנתן m זוגות, האם הסגור הטרנזיטיבי שלהם הוא סדר חלקי?