© Itai December 10, 1997

עצים מאוזנים

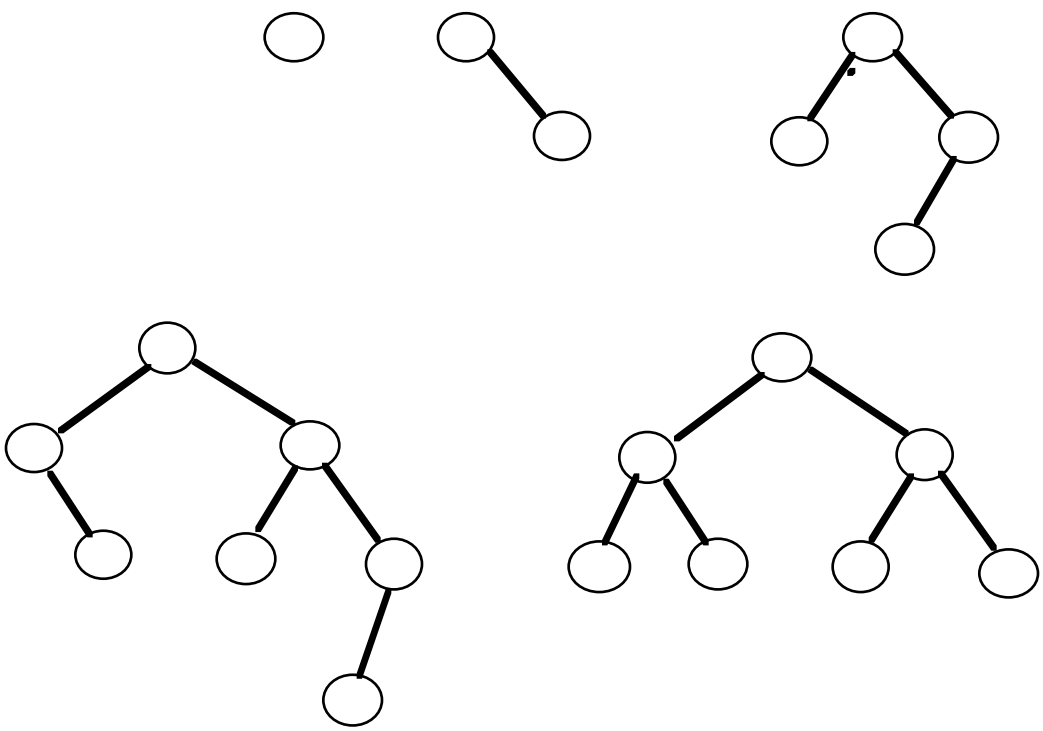
הגדרה משפחת עצים תקרא **מאוזנת** אם $h(T) = O(\log n)$.

עצי AVL -- מאוזן בגובה

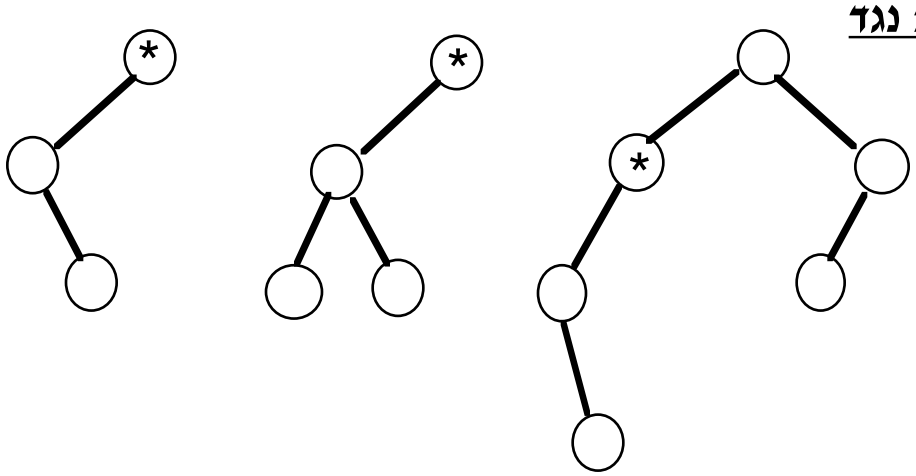
הגדרה עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$|h(v\text{->left}) - h(v\text{->right})| \le 1$$

דוגמאות

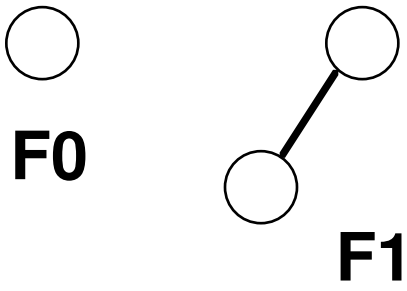


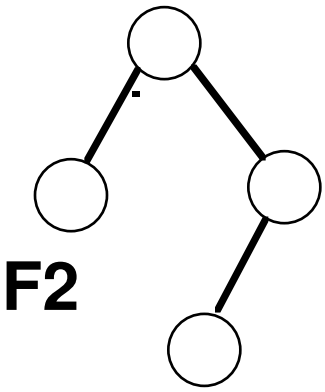
דוגמאות נגד

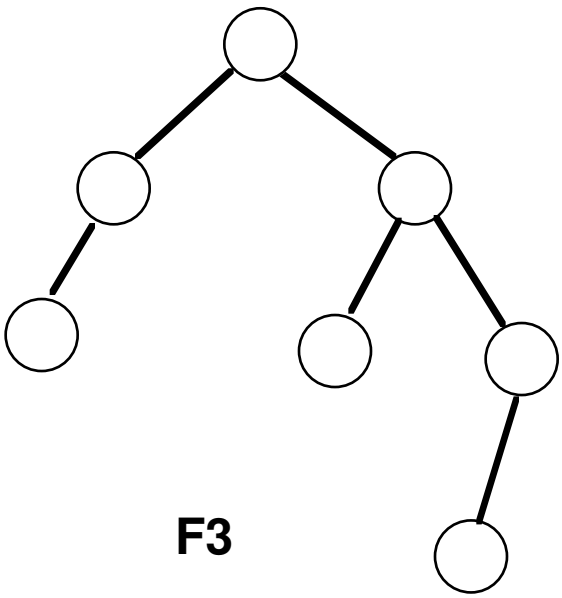


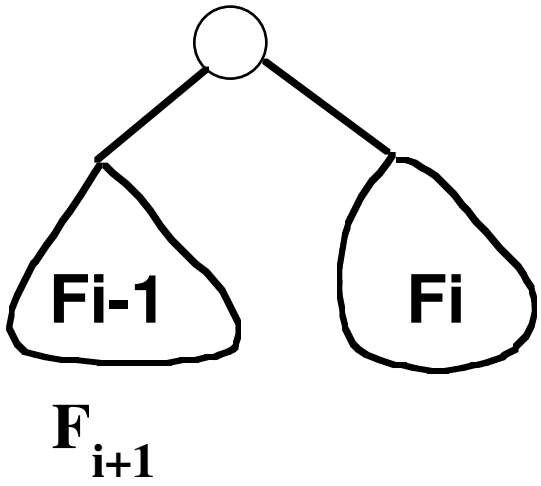
חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים:









טענה א. לעץ F_h גובה h .
ב. F_h הוא עץ AVL.
ג. $|F_h| < |F_{h+1}|$.
ד. מבין כל עצי AVL עם גובה h, ל-F_h מספר מינימלי של צמתים.

מסקנה: לכל עץ AVL עם $n = |F_h|$ צמתים, גובה $h \geq$.

הוכחה: נניח בדרך השלילה שקיים עץ T בן n צמתים וגובה $h+1 \leq$.

$$n = |F_h| < |F_{h+1}| \leq |T| \leq n$$

סתירה.

מספרי פיבונצ'י (Fibonacci)

הגדרה: n_i מספר פיבונצ'י ה-i :

$$n_0 = 0$$
$$n_1 = 1$$
$$n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$$

מכאן

$$n_2 = 1$$
$$n_3 = 2$$
$$n_4 = 3$$
$$n_5 = 5$$

אפשר להוכיח באינדוקציה

$$n_i = \frac{\phi^i - \bar{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

כאשר

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ **יחס הזהב**

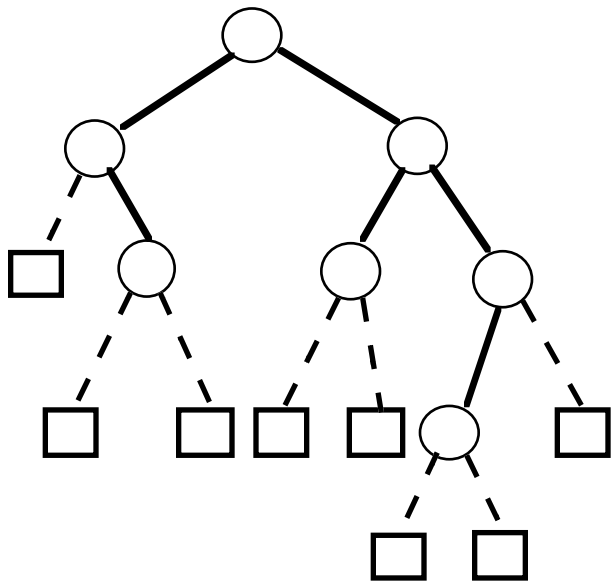
$$\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

כיון ש $|\bar{\phi}| < 1 < \phi$

$$n_i \approx \frac{\phi^i}{\sqrt{5}}$$

ניתוח גובה עץ AVL

כדי לפשט את החשבונות נוסיף "צמתים חיצוניים" לעץ:
במקום כל pointer ל-NULL נשים בצומת חיצוני.



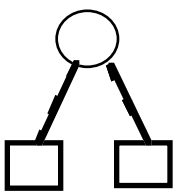
טענה 1: **לעץ בן n צמתים רגילים יש n+1 צמתים חיצוניים.**

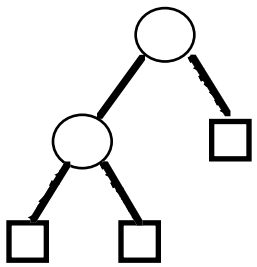
סימון נסמן ב- f_i את מספר הצמתים החיצוניים של העץ F_i.

טענה 2: $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$

טענה 3: $f_i = n_{i+3}$

הוכחה אינדוקציה על i
בסיס ($i=0,1$)





$f_0 = 2 = n_3$ $\qquad$ $f_1 = 3 = n_4$

צעד האינדוקציה

$$f_{i+1} = f_i + f_{i-1} = n_{i+3} + n_{i+2} = n_{i+4}$$

יהי T עץ בן n צמתים חיצוניים וגובה h.

$$n = |T| \geq f_h - 1 = n_{h+3} - 1 \cong \frac{\phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1$$

הגובה הוא

$$h \leq \left(\log_\phi \frac{n+1}{\sqrt{5}} \right) - 3$$

$$h \leq \left(\log_\phi n + 1 \right) + \left(\log_\phi \sqrt{5} \right) - 3$$

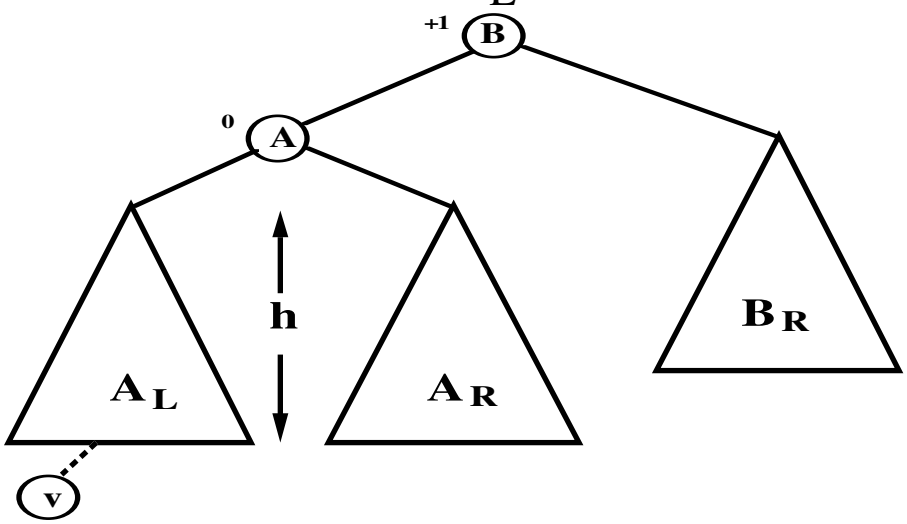
$$\cong 1.44 \log_2 n + O(1)$$

לכן לכל עץ AVL בן n צמתים גובה $h = O(\log n)$.

הכנסה לעץ AVL – גלגולים

הכנסה: נוסיף כמו בעץ חיפוש בינארי, ואח"כ נתקן את האיזון (היכן שהופר).

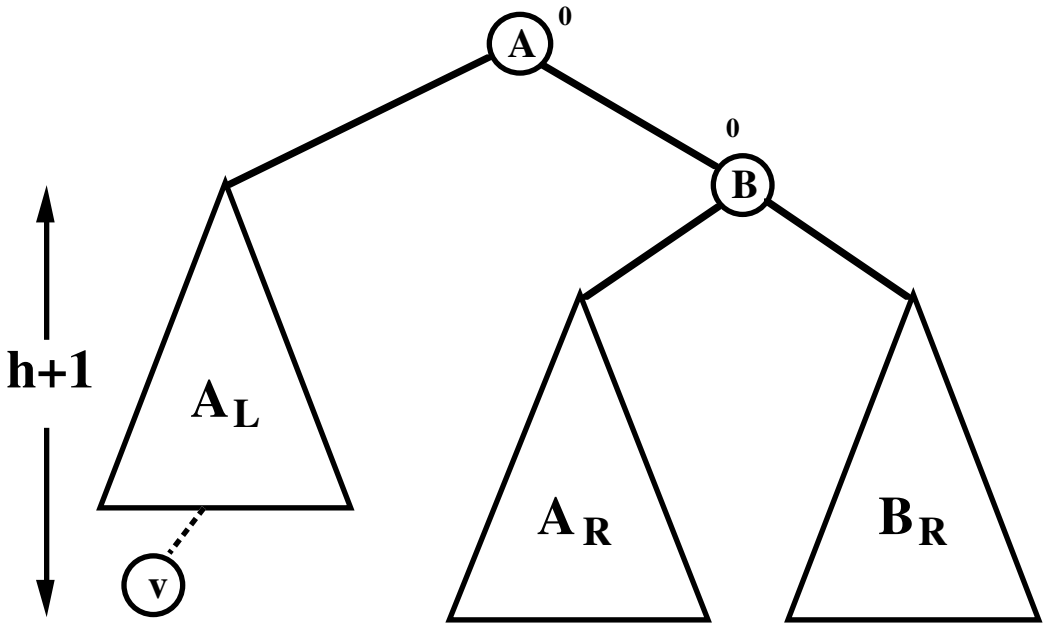
מקרה 1: הוכנס איבר ל-A_L



גובה העץ הוא h+2.

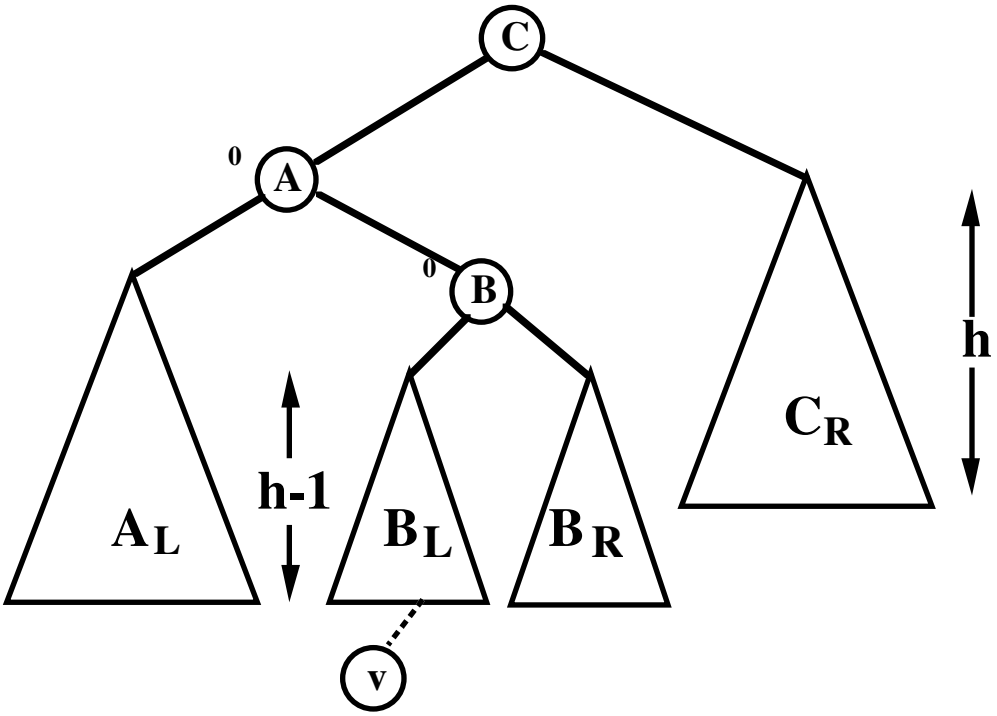
הכנסת צומת v הגדילה את גובה A_L ל- h+1.

<u>גלגול "זיג-זיג"</u> (LL): יעביר את A לשורש



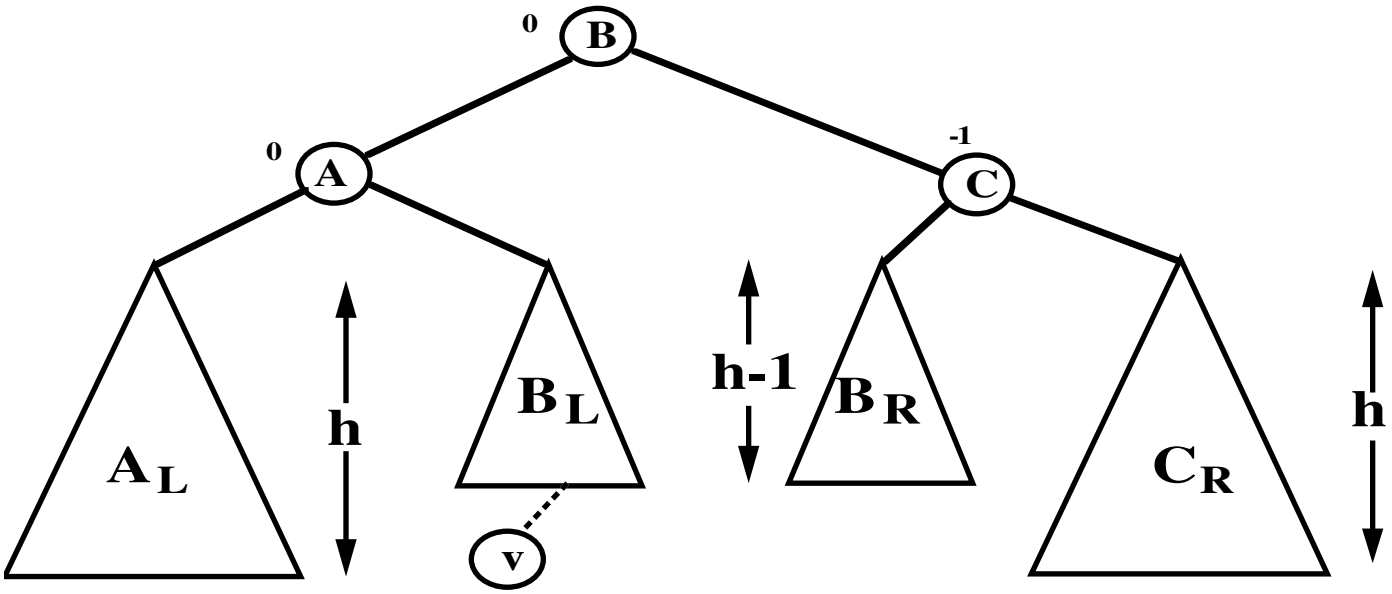
- **גובה העץ אחרי הגלגול הוא h+2, כמו לפני ההכנסה.**
- **השורש מאוזן.**
- **שינינו O(1) מחוונים ⇐ זמן הגלגול O(1).**

מקרה 2: הוכנס איבר ל-B:



הוכנס איבר ל-B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל-h.

<u>גלגול "זיג-זג"</u> (LR):



גובה העץ אחרי הגלגול הוא h+2, כגובהו לפני ההכנסה.
שינינו O(1) מחוונים.

אלג׳ להכנסת ערך x לעץ AVL

לצורך המימוש נוסיף לכל צומת שדה h שיכיל את הגובה.

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי;
   יהי v העלה שהוסף.
2. v->h = 0
3. כל עוד v ≠ root

4. p = parent(v)
5. אם p->h ≥ v->h+1 סיים.
6. p->h = v->h+1
7. אם ב-p הופר האיזון בצע גילגול
   (זיג-זיג או זיג זג) וסיים.
8. אחרת v = p

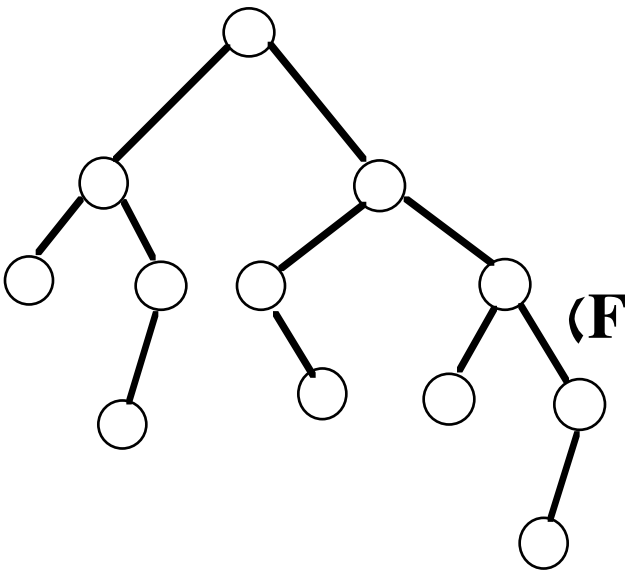
שאלה: איך נחשב את parent(v)?

זמן הכנסה

אובזרבציה:

כיון שהצומת בו עושים גלגול לא משנה את גובהו,
מבצעים רק גלגול אחד.

מציאת המקום הדרוש להכנסה – $O(h)$
הוספת הצומת – $O(1)$
מציאת המקום בו מופר האיזון
(אם מופר) – $O(h)$
תיקון האיזון – $O(1)$
סה"כ – $O(h) = O(\log n)$



הוצאות:

הטכניקה דומה.
אך ייתכן יותר מגלגול אחד
(דוגמא: הוצאת עלה ראשון מ-F_i)

מסקנה:

עצי AVL מאפשרים
חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן $O(\log n)$.

מידע נוסף בעץ חיפוש

בכל צומת פנימי נוסיף מידע על התת-עצים

• עץ דרגות – (rank tree)

המידע הנוסף: בכל צומת v מספר האיברים בתת העץ -- n(v)

מאפשר לחשב את ה -rank של הצומת (כמה צמתים נמצאים לפניו):

נסתכל על המסלול p מהשורש לצומת x.

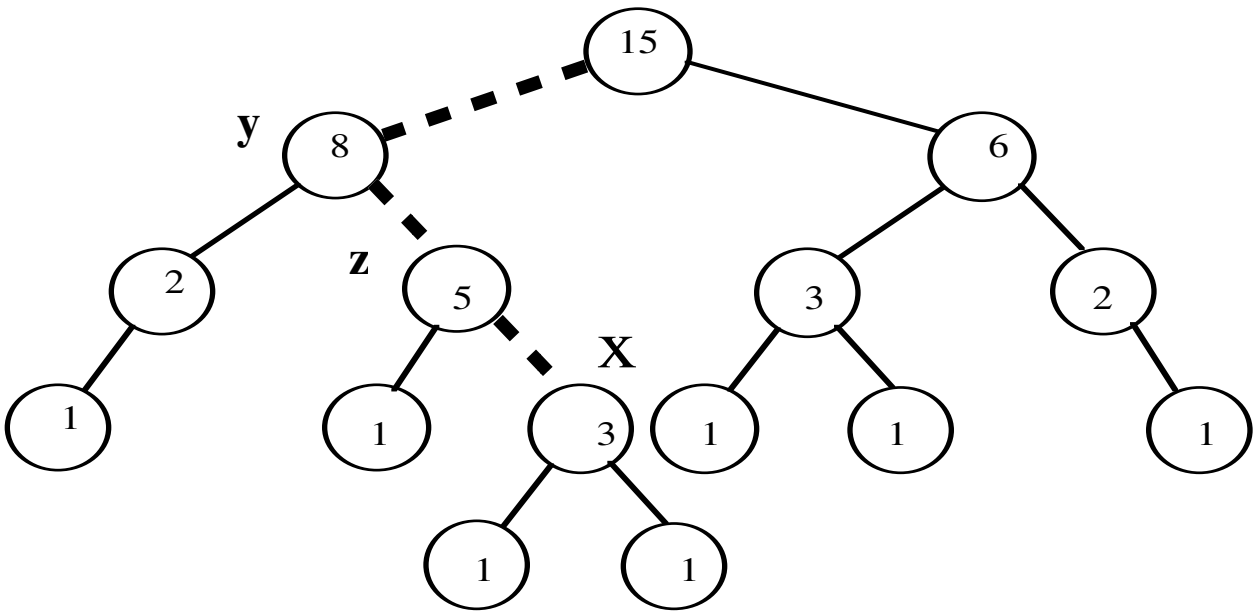
צומת w הוא <u>בן שמאלי של המסלול</u> p

אם w בן שמאלי של צומת במסלול

אך w עצמו לא שייך למסלול.

$$rank(x) = \Sigma\, n(w) + |\{v \text{ in } p,\ v<x\}|$$

כאשר הסכום הוא על כל הבנים השמאליים של p.



$$rank(x) = 2+1+1+ |\{y,z\}| = 6$$

בעץ מאוזן מציאת ה-rank דורשת זמן O(log n) .

• מידע נוסף לפי הצורך: סכום ערכי הצמתים בתת-עץ