תרגיל בית יבש מס' 1

תאריך הגשה: עד 20.11.97 בחצות

הגשה בזוגות בלבד!

שאלה 1

הוכח או הפרך (הנח $f(n)$, $g(n)$ ו-$h(n)$ פונקציות חיוביות):

א. אם $f(n) = \Omega(g(n))$, אזי $g(n) = \Omega(f(n))$.

ב. אם $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$, אזי $h(f(n)) = \mathrm{O}(h(g(n)))$.

ג. אם $f(n) = \Theta(h(n))$ וגם $g(n) = \Theta(h(n))$, אזי $g(n) = \Theta(f(n))$.

ד. $2^{2n+15} = \mathrm{O}(4^n)$.

ה. $2^{3n} = \Theta(3^{2n})$.

ו. $\log((n!)^n) = \mathrm{O}(n^2 \log n)$.

ז. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Omega(n^4)$.

ח. אם תכנית מסויימת מבצעת 27 צעדים עבור קלט $n = 3$, 64 צעדים עבור קלט $n = 4$ ו-125 צעדים עבור קלט $n = 5$, אזי זמן ריצת התכנית הינו $\Omega(n^3)$.

שאלה 2

עבור כל אחד מהקטעים להלן קבע את סיבוכיותו כפונקציה של n. נמק!

א.
```
scanf("%d", &n);
k = n * n;
while(k > n){
  n += 2;
  k -= 4;
}
```

ב.
```
scanf("%d", &n);
for(i = n; i > 0; i--){
  x = 2.0 / i;
  for(y = 1; y < i*i; y += x);
}
```

ג.
```
scanf("%d", &n);
a = 1;
for(i = 3; i <= n; i += 3)
  a *= i;
for(i = 1; i < a; i = i*i);
```

שאלה 3

מטריצת בלוקים היא מטריצה ריבועית שכולה אפסים פרט אולי ל"בלוקים" לאורך האלכסון הראשי. כל בלוק הינו תת-מטריצה ריבועית שהאלכסון הראשי שלה מתלכד עם האלכסון הראשי של המטריצה הגדולה. הבלוקים הם לאו דווקא באותו גודל (< 0).

מטריצת בלוקים פשוטה היא מטריצת בלוקים שבה בכל בלוק יש ערך יחיד. לדוגמא:

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

הצע מבנה נתונים המתחזק מטריצת בלוקים פשוטה $M_{n\times n}$ בסיבוכיות זכרון $O(n)$ ומאפשר ביצוע הפעולות הבאות בסיבוכיות זמן $O(1)$. הפעולות:

א. get (i, j) – החזר את הערך $M_{i,j}$.

ב. put (i, j, x) – אם הכניסה i,j-ית לא שייכת לאף בלוק במטריצה, הודע הודעת שגיאה. אחרת הצב את הערך x לכניסה הזו ועדכן גם את שאר הערכים באותו בלוק. למשל, אחרי ביצוע הפעולה put (2, 3, 5) על המטריצה מהדוגמא הקודמת תתקבל המטריצה הבאה:

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

אולם הפעולה put (2, 4, 5) תחזיר הודעת שגיאה.

ג. mirror – הפוך את המטריצה סביב האלכסון הניצב לאלכסון הראשי. למשל, עבור המטריצה מהדוגמא הראשונה נקבל:

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

תאר את מבנה הנתונים המוצע במילים ובציור.
צייר כיצד תראה המטריצה מהדוגמא הראשונה במימוש שלך.
פרט ביצוע הפעולות הנ"ל ונמק את העמידה בדרישות הסיבוכיות.

בהצלחה !