תרגיל בית יבש מס' 3

תאריך הגשה: עד 29.01.98 בחצות

הגשה בזוגות מומלצת!

<u>שימו לב:</u> יש לענות על <u>כל השאלות</u>.
מי שיגיש את התרגיל עד 22.01.98 יקבל בונוס 10 נקודות.

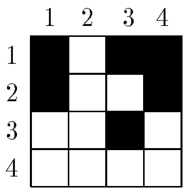
שאלה 1 (25 נק')

נתון קטע ממשי $[0,1]$. כל נקודה בו יכולה להיות שחורה או לבנה.
הצע מבנה נתונים המאפשר את ביצוע הפעולות הבאות:

- Init – אתחל את המבנה כאשר כל הנקודות צבועות בלבן. הסיבוכיות הנדרשת $O(1)$.
- Reverse(x,y) – הפוך צבען של כל הנקודות בתחום $[x,y]$ (הנח כי $0<x<y<1$), כלומר: כל נקודה שחורה תהפוך ללבנה, ולבנה לשחורה. הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$, כאשר n הוא מספר פעולות ה-Reverse שהתבצעו עד כה.
- Color(x) – החזר את הצבע של הנקודה x (הנח כי $0<x<1$). הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$.

תאר את המבנה המוצע במלים ובציור. פרט את ביצוע הפעולות ונמק עמידה בדרישות הסיבוכיות.

שאלה 2 (25 נק')



נתון נייר משבצות בגודל $n\times n$ (n ידוע מראש אך אינו קבוע לצרכי הסיבוכיות). מדי פעם מגרילים זוג מספרים שלמים מתחום $[1,n]$ וצובעים את המשבצת בעלת הקואורדינטות האלה בשחור.
הצע מבנה נתונים המאפשר את ביצוע הפעולות הבאות בסיבוכיות טובה ככל האפשר:

- Init – אתחל מבנה הנתונים, כאשר הדף ריק (כל המשבצות לבנות). הסיבוכיות הנדרשת $O(n^2)$.
בונוס למי שיממש את ה-Init ב-$O(1)$.
- Color(x,y) – צבע בשחור את המשבצת (x,y).
- Shape(x_1,y_1,x_2,y_2) – האם זוג המשבצות (x_1,y_1) ו-(x_2,y_2) שייכות לאותה צורה?
שתי משבצות שייכות לאותה צורה אם קיימת בינהן סדרת משבצות שחורות "נוגעות" (כולל אלכסון). משבצות לבנות לא שייכות לאף צורה.
לדוגמה, המשבצות $(1,3)$ ו-$(3,3)$ שבציור הן שייכות לאותה צורה, לעומת זאת המשבצות $(1,3)$ ו-$(1,1)$ לא שייכות לאותה צורה, וגם המשבצות $(4,2)$ ו-$(4,1)$ לא שייכות לאותה צורה.
- Which(x,y) – החזר רשימת כל המשבצות השייכות לצורה ש-(x,y) שייכת אליה.
- Num – כמה צורות יש כרגע על הדף? הסיבוכיות הנדרשת $O(1)$.

תאר את המבנה המוצע ואת הפעולות הנ"ל.
נתח סיבוכיות של כל פעולה במקרה הגרוע.
מהי הסיבוכיות הממוצעת של סדרת הפעולות המכילה: איתחול, C פעולות Color, S פעולות Shape ו-N פעולות Num?

שאלה 3 (25 נק')

הצע מבנה נתונים המאפשר ביצוע פעולות הבאות בסיבוכיות הנדרשת:

- init – בהנתן רשימה לא ממויינת של n איברים, אתחל את המבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(n)$.
- insert(x) – הכנס x למבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$.
- find_min – החזר את הערך המינימלי במבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(1)$.
- find_max – החזר את הערך המקסימלי במבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(1)$.
- find_mid – החזר את ערך החציון הנוכחי במבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(1)$.
- del_min – מחק את המינימום מהמבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$.
- del_max – מחק את המקסימום מהמבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$.
- del_mid – מחק את החציון הנוכחי מהמבנה. הסיבוכיות הנדרשת $O(\log n)$.

תאר את המבנה המוצע במלים ובציור. פרט את ביצוע הפעולות ונמק עמידה בדרישות הסיבוכיות.

שאלה 4 (25 נק')

א. נתונות K קבוצות $S_1, S_2, \ldots, S_K$. כל קבוצה מכילה מספרים שלמים מהתחום $[1, n]$. נסמן ב-$|S_i|$ את גודל הקבוצה S_i. נתון כי $\sum_{i=1}^{K} |S_i| = O(n)$.
הצע אלגוריתם הממיין את המספרים בכל קבוצה אשר דורש זמן $O(n)$ ומקום נוסף $O(n)$.
<u>שים לב:</u> פלט האלגוריתם הוא K קבוצות ממויינות <u>ולא</u> קבוצה ממויינת גדולה אחת.

ב. נתונה קבוצה של n מספרים שלמים מעל התחום $[0, n^p]$.
הצע אלגוריתם הממיין את המספרים בקבוצה.
סיבוכיות הזמן הנדרשת היא $O(np)$. סיבוכיות המקום $O(n)$.

שאלה 5 (25 נק')

נתונה טבלת ערבול H בגודל 11. נתונות גם פונקציות ערבול וצעד:

hash function: $h(n) = n \bmod 11$
step function: $r(n) = (n \bmod 9) + 1$

עבור כל אחת מהטבלאות הבאות קבע האם קיימת סדרת הכנסות המתחילה בטבלה ריקה ומביאה למצב הנתון. לא מתבצעות מחיקות.
אם קיימת סדרה כנ"ל תן דוגמה, אחרת הסבר מדוע לא קיימת.

a)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	26	11	12	46	17	47	16	7	8	9

b)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	50	16	45	22	30	8	7	19	47	52

בהצלחה !