שם פרטי:

שם משפחה:

מספר זהות:

חדר הבחינה: _____

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל — הפקולטה למדעי המחשב

מבני נתונים

מבחן סוף סמסטר

מועד א'

7 יולי, 1996

מרצים: אלון איתי, אלי דיכטרמן

מתרגלים: יבגני גברילוביץ', אולג לדניוב, ניב גלבוע

משך המבחן: 2:30 שעות מותר כל חומר עזר. ענה על טופס הבחינה.

שאלה	מכסימום	
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	

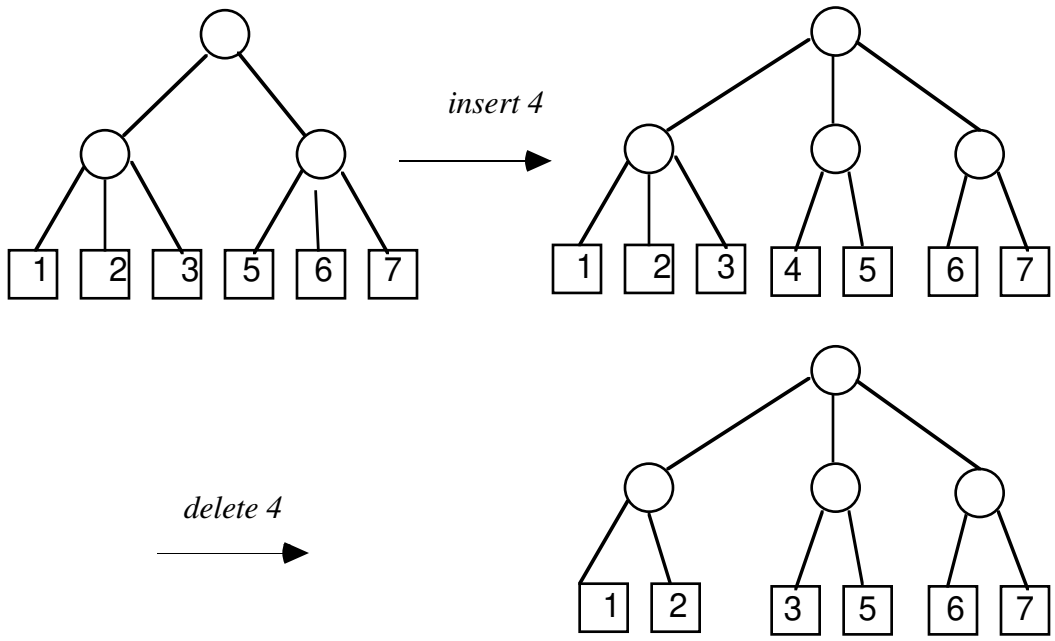
בהצלחה!

שאלה 1

יהי T עץ 2-3. ויהי T' העץ המתקבל מהוספת צומת x ל-T והוצאתה.
נחקור מתי $T = T'$.
נסתכל על המקרים הבאים:
א. בהכנסת x לא היה צורך לפצל צומת.
ב. ב-T היו 3 עלים.
ג. בהוצאת x לא היה צריך לבצע איחודים.

לכל אחד מהמקרים, הוכח ש- $T = T'$ או תן דוגמא נגדית.

פתרון :
א. כן
ב. כן
ג. לא
דוגמא נגדית:



שאלה 2

השאלה דנה בווריאנטים לאלגוריתם הדטרמיניסטי למציאת חציון.
האם הווריאנטים הבאים זמנם ליניארי?

א. במקום לחלק את הקלט לחמישיות נחלק אותו לשביעיות.
ב. במקום לחלק את הקלט לחמישיות נחלק אותו לשלישיות.
נמק את תשובתך!

שאלה 3

ברב-קבוצה (multi-set, bag) כל איבר יכול להופיע מספר כלשהו של פעמים, אך הסדר אינו משנה.
שתי רב-קבוצות S,T הן שוות אם הן מכילות אותם האיברים, וכל איבר מופיע ב-S וב-T אותו מספר פעמים.
דוגמא: עבור $V=\{1,2,3\}$, $T=\{1,1,1,2,3,3\}$, $S=\{1,3,1,1,2,3\}$ מתקיים $S=T$ ו- $S\neq V$.

עליך להציע אלגוריתם לבדוק אם שתי רב-קבוצות, S,T הן שוות. בנה אלגי נפרד לכל אחד מהמקרים הבאים:
(בסעיפים א' ו-ג' n ידוע מראש, אך אינו קבוע לצורך חישוב הסיבוכיות.)

א. אברי S,T שייכים ל- $\{1,\ldots,n\}$ -- זמן $O(|S|)$,
$|S|$ מסמן את מספר אברי S, כאשר כל איבר נספר כמידת ריבויו בדוגמא לעיל $|S|=6$.
שים לב, שעליך לעמוד בדרישות הזמנים גם כאשר $|S|<|T|$ וגם כאשר $|S|<o(n)$.

ב. S,T הן רב-קבוצות של מחרוזות -- זמן $length(S)=\sum_{s\in S} length(s)$
(דוגמא אם $S=$ {"abc", "ab", "abc"} אזי $length(S)=8$).

ג. S,T הן רב-קבוצות כלשהן של מספרים שלמים בתחום $1..n^{10}$ -- זמן $O(n+|S|)$ בממוצע לכל קלט אפשרי . עליך להשתמש במקום $O(n+|S|)$.

שאלה 4

שר האוצר החדש החליט לכסות את הגרעון בתקציב המדינה ע"י גביית אגרה בכביש חיפה-ת"א (לכיוון ת"א).
לשם כך, הוא בנה תחנות תשלום לאורך הכביש, ועל כל נהג העובר בתחנת תשלום לשלם ₪ 1.
כל תחנת תשלום תזוהה על-פי מרחקה מחיפה.

עליך להציע מבנה נתונים התומך בכל הפעולות הבאות בזמן $\log n$, כאשר n הוא מספר התחנות.

א. $add(x)$ הוסף תחנה בק"מ x.
ב. $drive(x,y)$ נהג נסע מק"מ x לק"מ y.
ג. $revenue(x,y)$ סה"כ ההכנסות (בשקלים) של התחנות הנמצאות בין ק"מ x לק"מ y (מאז הנהגת התשלום). (אם תחנה הוספה אחרי שהנהג נסע בה, אז לא מתקבלת בה שום הכנסה מהנהג).

פתרון
(סקיצה)
בלי add התחנות ידועות מראש.
נשמור את התחנות בעלי עץ שלם מסודרות לפי מרחקן מחיפה.

בכל צומת v נשמור:
$pass(v)$ = מספר הנהגים שעברו דרך כל התחנות שבעלי תת-העץ שתלוי מ-v,
אבל לא עברו דרך כל תחנות $father(v)$.
$size(v)$ = מספר עלי תת-העץ שתלוי מ-v.
$rev_inside(v)$ ההכנסות בגין מכוניות שעברו בתת-העץ של v ולא עברו בכל תת העץ של $father(v)$

ביצוע $revenue(x,y)$:
מצא את המסלולים מהשורש ל- x ול-y. יהי z הצומת הרחוק ביותר מהשורש שנמצא על שני המסלולים.

יהי L קבוצת הבנים הימניים של צמתים של המסלול z-x שלא שייכים למסלול זה.
יהי R קבוצת הבנים השמאליים של צמתים של המסלול z-y שלא שייכים למסלול זה.
נחשב $rev = \sum_{v \in L \cup R} rev_inside(v)$

יהי $size'[v,x,y]$ מספר העלים בתת העץ של v הנמצאים בין x ל-y .
$$revenue_pass = \sum_{v \in path(root-x) \cup path(root-y)} pass(v) * size'[v,x,y]$$

התוצאה: $revenue(x,y) = rev + revenue_pass$

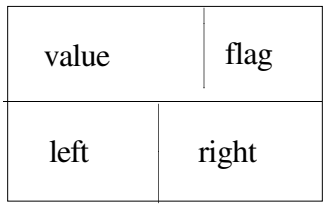
ביצוע $drive(x,y)$
בעזרת $size$ עדכן את שדות rev_inside לצמתים לאורך המסלולים ולבניהם.

מצא z כמו ב-$revenue$
עדכן את $pass$ על המסלולים מ-z ל-x ול-y.

כדי לתמוך ב- $add(x)$
יש להחליף את העץ בעץ 2-3 , שהתחנות נמצאות בעליו.
תחילה נוסיף צומת x לעץ ונעדכן את השדות כמו ב-**rank tree**.
עכשו נרצה עקרונית לפצל כל נהג שעבר דרך x לשניים: לנהג שירד ב- $prev(x)$ ולנהג שעלה ב-$next(x)$.
לשם כך, נעבור על כל המסלול $root$-x ולכל צומת v לאורכו (מהשורש ל-x):
נבצע $pass(v \to son) \mathrel{+}= pass(v)$; (לכל הבנים)
ובסוף $pass(v) = 0$;
כאשר מפצלים צומת צריך לעדכן את שדה ה-rev_inside של הצמתים החדשים ע"ס rev_inside של בני הצומת.

שאלה 5

מקומות (בנוסף למקום $O(1)$ צמתים כאשר עומדים לרשותך n על עץ בן Postorder כיצד תבצע סריקת הדרוש לאחסון העץ). בסוף הפעולה, העץ צריך להשאר ללא שינוי.
מבנה צומת הוא



flag שדה הוא של ביט בודד, שערכו ההתחלתי והסופי בכל הצמתים הוא 0.
סיבוכיות הזמן הנדרשת היא $O(n)$.
תן הסבר קצר במילים של האלגוריתם תוך הדגשת השווה והשונה משיטה שנלמדה בכיתה.