שם פרטי:

שם משפחה:

מספר זהות:

פקולטה: _____

חדר הבחינה: _____

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

מבנה נתונים 1

234218

מבחן סוף סמסטר

מועד א'

17 יולי, 1995

מרצים: א. איתי

ש. כ"ץ

משך המבחן: 3 שעות מותר כל חומר עזר. ענה על טופס הבחינה.

שאלה	מכסימום	
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	

בהצלחה!

שאלה 1

א. נתון $f(n+1) > f(n)$

$f(1) = 1$

הוכח או הפרך: $f(n) = O(n^3)$

ב. הוכח או הפרך:

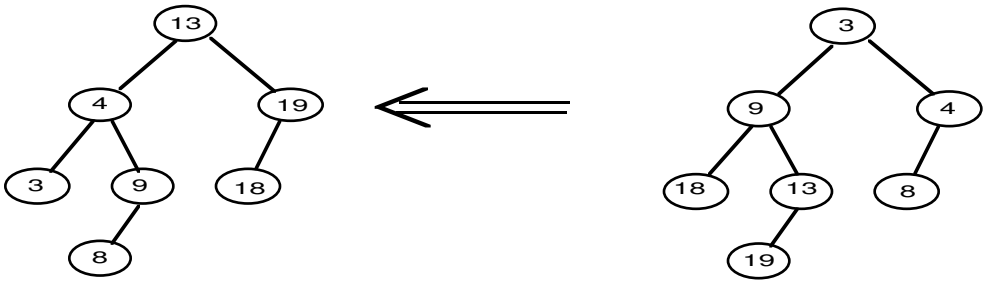
רשימת דילוגים דטרמיניסטית, בעלת n צמתים ברמה התחתונה ביותר, דורשת מקום $\theta(n \log n)$.

ג. כתוב ביטוי postfix על המשתנים $a_1,\ldots,a_{10}$ כך שבזמן חישוב הביטוי ע"י האלגוריתם שנלמד בכיתה, עומק המחסנית
1. מינימלי;
2. מכסימלי.
(כל משתנה חייב להופיע בדיוק פעם אחת).

ד. יהי Σ א"ב בן 26 אותיות.
1. מה המספר המינימלי של צמתים ב-trie המכיל 10 מילים כ"א בת 7 אותיות.
2. מה המספר המכסימלי?
בשני הסעיפים הנח שכל צומת מכיל מערך של $|\Sigma|$ מחוונים.

שאלה 2

יהי T עץ בינארי כלשהו בן n צמתים עליהם יש n מפתחות שונים, בסדר ערימה (מפתח האבא < מפתח הבנים).
הפיכת T לעץ חיפוש, פרושה סידור מחדש של אותם המפתחות ב-T כעץ חיפוש בינארי בעל אותה הצורה.
דוגמא:



בכל הסעיפים מותר להשתמש ב-- $O(n)$ מקום בנוסף ל-T.

א. האם ניתן להפוך כל עץ בינארי שמפתחותיו מסודרים בסדר ערימה לעץ חיפוש בזמן $O(n)$?
הראה אלגי או נמק מדוע אי אפשר.

ב. מהו <u>מספר ההשוואות המינימלי בין מפתחות</u> הדרוש כדי לבצע את הפעולה ההפוכה: בהנתן עץ חיפוש בינארי T כלשהו בעל n צמתים, סדר מחדש את המפתחות על T בסדר ערימה. הסבר!

שאלה 3

ערבול מסודר היא שיטה לפתרון התנגשויות הדומה ל-open addressing עם סריקה ליניארית, אלא שאם x הוכנס למקום j המקומות בתחום $h(x), h(x)+1, \cdots, j$ תפוסים ע"י מפתחות $\geq x$. (מקומות בטבלה מחושבים מודולו גודל הטבלה, m)

א. הנוהל הבא מחפש איבר בטבלה המאורגנת לפי סריקה ליניארית:

```
0: #define not_found -1
1: int search(KEY x){
2:int i;
3:    for(i=h(x); T[i] != NULL; i=(i+1) % m){
4:         if(T[i] == x)
5:              return i;
6:    }
7:    return not_found;
8:}
```

האם נוהל זה <u>בלי שום שינוי</u> נכון גם לערבול מסודר?

_____

שנה שורה אחת בנוהל כדי שיעבוד נכון <u>ובאופן יעיל</u> לערבול מסודר.
נשנה את שורה מספר _____
השינוי:

_____

_____

_____

ב. ג'וזף הכניס את המפתחות $x_1, \ldots, x_n$ משמאל לימין, יוסף מימין לשמאל, מה ההבדל בין הטבלאות שלהם? (שניהם התחילו עם טבלה ריקה). הניחו שכל המפתחות שונים ושניהם השתמשו בערבול מסודר.

<u>ההבדל</u>: _____

נימוק (קצר):

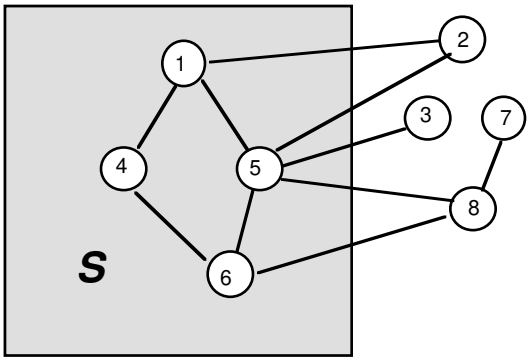
_____

_____

ג. תהי T טבלת סריקה ליניארית ריקה בגודל m. נתונים $m > n$ מפתחות . כיצד תכניס ל-T בזמן $O(m)$ במקרה הגרוע? (T חייבת להיות מאורגנת כטבלת ערבול לסריקה ליניארית – ערבול רגיל, לאו דווקא מסודר). מותר להשתמש בזכרון נוסף.

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון בעל n צמתים ו-m קשתות.
עבור קבוצת צמתים $S \subseteq V$, $OUT(S)$ מוגדר כמספר קשתות G שרק קצה אחד שלהן שייך ל-S.
<u>דוגמא:</u> עבור $S = \{1,4,5,6\}$, $OUT(S) = 5$.



נדון בשני אלגוריתמים לחישוב $OUT(S)$. לכל אחד מהם הצע ייצוג ל-G ומבני נתונים נוספים שייאפשרו ביצוע יעיל של האלגוריתם. הנח שבניית ייצוג ל-G היא בחינם (ייצוג כל מבני הנתונים מוגבל ל-$O(n^2)$ מקום). , ו-S מיוצג כרשימה מקושרת. תאר את הסיבוכיות כפונקציה של Δ, s, n, m , כאשר $s = |S|$, Δ = הדרגה המכסימלית של צומת ב-G , $n = |V|$ ו-$m = |E|$. הנח: $s << \Delta$

א. לכל קשת $(u,v) \in E$ היוצאת מצומת $u \in S$ אם $v \notin S$ הוסף אותה לספירה. $OUT(S)$ שווה לתוצאת הספירה.

ב. ספור את מספר הקשתות ב- G הקושרות שני צמתים ב- S: $k = \left|(S \times S) \cap E\right|$

יהי סכום דרגות צמתי S: $d = \sum_{u \in S} \left|\{(u,v) \in E \ : \ v \in V\}\right|$

$OUT(S) = d - 2k$

.

שאלה 5

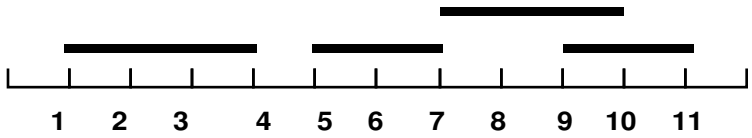
עליך לבנות מבנה נתונים להחזיק קטעים סגורים על הישר, כל קטע מיוצג ע"י קצוותיו $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. (הקצוות מיוצגים ב-floating point.

מוגדרות שתי פעולות:

$\boldsymbol{insert}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ הוסף את הקטע $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ למבנה.

$\boldsymbol{left}(\boldsymbol{y})$ מצא את הנקודה המינימלית $\boldsymbol{x}$ כך שכל הקטע $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ מכוסה ע"י איחוד הקטעים במבנה. (אם $\boldsymbol{y}$ לא מכוסה החזר NULL.)

<u>דוגמא</u>: אם הכנסנו את [7,10], [9,11], [5,7], [1,3] אזי $\boldsymbol{left}(2)=1$ ו- $\boldsymbol{left}(8)=5$, $\boldsymbol{left}(4.5)=\text{NULL}$



הנח שבתחילה המבנה ריק ונעשו $\boldsymbol{n}$ פעולות $\boldsymbol{insert}$. בכל הסעיפים מותר להשתמש ב-$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$ מקום.

א. תאר מבנה נתונים ואלגי למימוש פעולות $\boldsymbol{left}$, $\boldsymbol{insert}$, בהנחה שכל הקטעים זרים. סיבוכיות כל פעולה $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$.

ב. כמו א' אך קצוות הקטעים הם מספרים שלמים בתחום $[0,10\boldsymbol{n}]$, ו-$\boldsymbol{n}$ קטעים "כמעט זרים", כלומר, הם יכולים לחפוף רק בקצוות (לדוגמא, הקטע [7,20] שקול לקטעים [7,15],[15,20] אך אינו שקול לקטעים [7,15],[16,20]) . סיבוכיות $\boldsymbol{n}$ פעולות $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}\alpha(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}))$. (פעולה בודדת עלולה לקחת הרבה זמן). α היא ההופכית של פונקצית אקרמן. בסעיף זה הנח ש-$\boldsymbol{n}$ ידוע מראש.

<u>רמז</u>: אין צורך לממש פעולת $\boldsymbol{delete}$.

<u>בונוס</u> פתור את א' או ב' או את שניהם עבור קטעים שאינם בהכרח זרים.

ל-א' סיבוכיות $\boldsymbol{n}$ פעולות $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}\log \boldsymbol{n})$.

ל-ב' סיבוכיות $\boldsymbol{n}$ פעולות $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}\alpha(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}))$.

יינתנו נקודות רק לפתרונות מלאים, לא לשברי רעיונות.