פתרון בעיות (Problem Solving)

בעית המיסיונרים והקניבלים

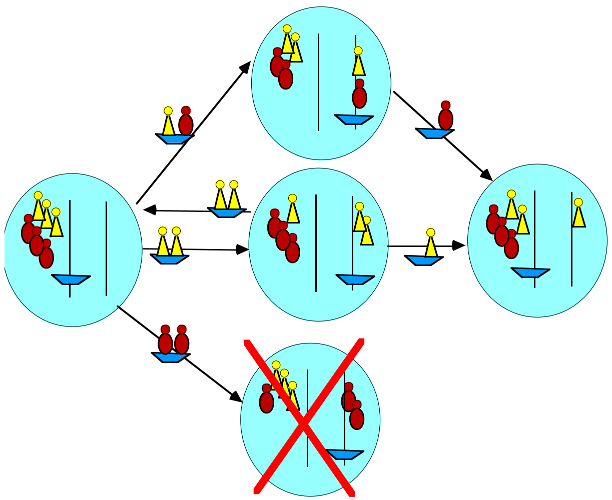
שלשה מיסיונרים ושלשה קניבלים מצאו את עצמם על גדת הנהר. לרשותם עומדת סירה עם שני מקומות. מטרתם לעבור לגדה השנייה. הקניבלים אינם מוכנים שייווצר מצב בו יהיו יותר מיסיונרים מקניבלים באחת הגדות (אחרת המיסיונרים ינסו להמיר אותם). מצא סידרה של העברות אנשים מגדה לגדה כך שלא ייווצר מצב שאינו חוקי.

פתרון בעיות ע"י סוכן

- מצב העולם הנקלט ע"י הסוכן הינו:
  1. 3 קניבלים ו-3 מיסיונרים בגדה השמאלית.
  2. הסירה ריקה בגדה השמאלית.
- הפעולות שהסוכן יכול לבצע:
  להעביר 2 קניבלים, 2 מיסיונרים או קניבל ומיסיונר.
- ה"פיסיקה" של העולם הידועה לסוכן:
  1. אם מספר המיסיונרים עולה על מספר הקניבלים באחת הגדות המצב אינו חוקי.
  2. אם מעבירים 2 מיסיונרים לגדה הימנית, מספר המיסיונרים בגדה השמאלית קטן ב -2 ומספרם בגדה הימנית גדל ב-2. וכו'.
- מטרת הסוכן: לבצע סדרת העברות שתביא את העולם למצב בו 3 מיסיונרים ו-3 קניבלים נמצאים בגדה הימנית.

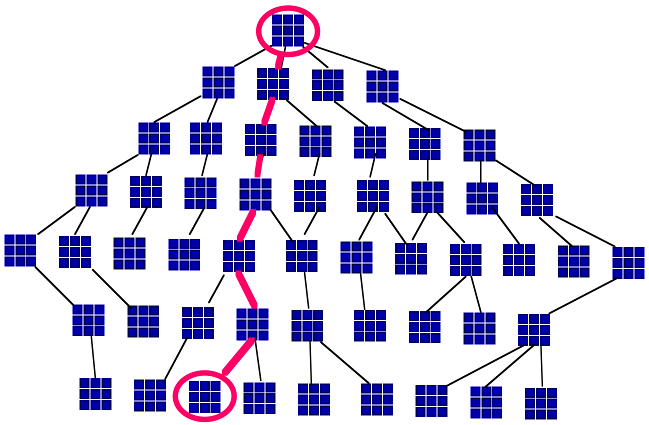
ייצוג העולם ע"י גרף מצבים

- ניתן לייצג "עולמות" רבים מנקודת מבט הסוכן באמצעות גרף מכוון.
- צמתי הגרף מייצגים את מצבי ה"עולם" האפשריים.
- קשת מכוונת בין צומת A לצומת B מסמנת קיום פעולה של הסוכן המעבירה את העולם מהמצב המיוצג ע"י A למצב המיוצג ע"י B.



פתרון בעיות ע"י חיפוש בגרף מצבים

- בעיה ספציפית בעולם ניתן לייצג ע"י זוג צמתים בגרף: הצומת המסמן את המצב הנוכחי והצומת המייצג את מצב המטרה.
- כאשר בעיה מיוצגת בצורה כזו ניתן לפתור אותה ע"י חיפוש מסלול שיוביל מהמצב ההתחלתי למצב הסופי.



ייצוג בעיה באמצעות מרחב מצבים

1. הגדר קבוצה S של כל המצבים האפשריים בפתרון הבעיה.
2. הגדר פונקצייה $succ: S \rightarrow 2^S$. זוהי פונקציית המעבר הנותנת עבור כל מצב את קבוצת המצבים הבאים.
3. הגדר את המצב ההתחלתי S_i (או קבוצת המצבים ההתחלתיים)
4. הגדר את המצב הסופי S_g (או קבוצת המצבים הסופיים).

הבעיה נפתרת ע"י מציאת מסלול מהמצב ההתחלתי למצב הסופי.

פונקציית מחיר

לעתים ניתן משקל שונה לקשתות שונות של הגרף. במקרה כזה נוסף להגדרת המרחב השלב הבא:

5. הגדר פונקציית מחיר

$$cost: \{\langle s_1,s_2\rangle | s_1 \in S, s_2 \in succ(s_1)\} \rightarrow \Re^+$$

המגדירה את מחיר המעבר ממצב למצב עוקב

- לדוגמא, בבעיית הקניבלים והמיסיונרים ניתן להגדיר כמחיר מעבר את מספר האנשים בסירה.
- לפעמים נרצה שמחיר המסלול (סכום מחירי המעברים) יהיה מינימלי.
- כאשר פונקציית המחיר אינה מצוינת אנו מניחים ש- $cost(s_1,s_2)=1$.

הערות

1. המרחב S יכול להיות אינסופי.
2. פעמים רבות ניתנת succ באמצעות קבוצה סופית (בד"כ קטנה) של אופרטורים. הקבוצה succ(s) מתקבלת ע"י הפעלת כל האופרטורים על s.

תהי $O=\{o_1,\cdots,o_n\}$ קבוצת האופרטורים כך ש- $o_i: S \rightarrow S \cup \{\phi\}$ (ϕ מסמן הפעלה לא חוקית)

אזי $succ(s)=\{o(s) | o \in O \ \&\ o(s) \neq \phi\}$

3. פעמים רבות ניתנת קבוצת המצבים הסופיים ע"י פרדיקט G כך ש:

$$G(s)=TRUE \Leftrightarrow s \in S_g$$

דוגמא: בעית המיסיונרים והקניבלים

מרחב מצבים: $S=\langle M_L,C_L,M_R,C_R,B\rangle$

כאשר:

- $M_L=\{0,1,2,3\}$ הינו מספר המיסיונרים בגדה השמאלית (M_R מספרם בימנית).
- $C_L=\{0,1,2,3\}$ הינו מספר הקניבלים בגדה השמאלית (C_R מספרם בימנית).
- $B=\{L,R\}$ הינה הגדה בה נמצאת הסירה.

מצב התחלתי: $S_i=\langle 3,3,0,0,L\rangle$

מצב סופי: $S_g=\langle 0,0,3,3,R\rangle$

פונקציית מעבר:

מוגדרת ע"י קבוצת האופרטורים:

$$O=\{o_m,o_c,o_{mc},o_{mm},o_{cc}\}$$

(האותיות מסמנות את הנוסעים בסירה - מיסיונר אחד, קניבל אחד וכו')

הגדרת האופרטורים

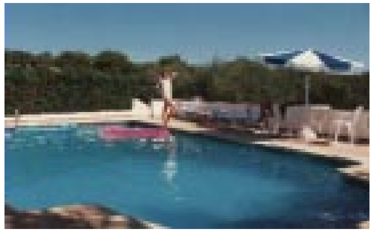
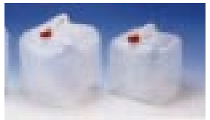
$$0_m(\langle m_L,c_L,m_R,c_R,L\rangle)=\begin{cases}\langle m_L-1,c_L,m_R+1,c_R,R\rangle & m_L>0\ \&\ \neg(m_R\ge c_R>0)\\ \phi & otherwise\end{cases}$$

$$0_m(\langle m_L,c_L,m_R,c_R,R\rangle)=\begin{cases}\langle m_L+1,c_L,m_R-1,c_R,L\rangle & m_R>0\ \&\ \neg(m_L\ge c_L>0)\\ \phi & otherwise\end{cases}$$

$$0_{mc}(\langle m_L,c_L,m_R,c_R,L\rangle)=\begin{cases}\langle m_L-1,c_L-1,m_R+1,c_R+1,R\rangle & m_L,c_L>0\\ \phi & otherwise\end{cases}$$

בעיית המכלים

נתונים 2 מכלים בעלי קיבולת של 3 ליטר ו-5 ליטר וכן ברכת מים גדולה מלאה מים.

על הסוכן למלא באחד המכלים 4 ליטר בדיוק. הפעולות אותם רשאי הסוכן לעשות הינן פעולות העברת מים ממיכל למיכל או שפיכת מים.

ייצוג בעיית המכלים באמצעות מרחב מצבים

קבוצת המצבים: $S=\langle J_5,J_3,P\rangle$

כאשר J_3 הינה התכולה של מיכל 3 הליטר, J_5 הינה תכולת מיכל 5 הליטר ו-P הינה תכולת הבריכה.

מצב התחלתי: $s_i=\langle 0,0,1000\rangle$

מצב סופי $final(\langle j_5,j_3,p\rangle)\Leftrightarrow j_5=4$

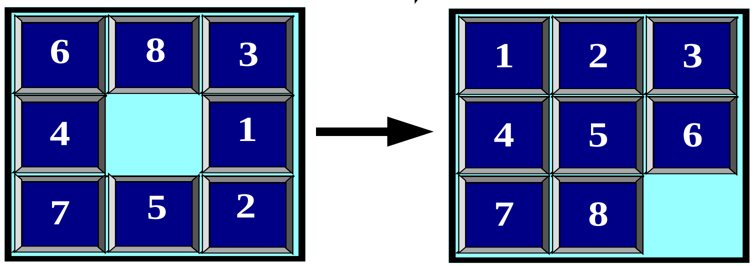
אופרטורים: P-to-J5,P-to-J3, J5-to-P,J5-to-J3,J3-to-P,J3-to-J5

כאשר X-to-Y אומר לשפוך את X לתוך Y עד אשר X מתרוקן או Y מתמלא (הראשון שקורה).

פונקציית מחיר: הפונקציה הקבועה cost(s,r)=1 (ניתן להגדיר בעיה דומה שבה רוצים להגיע לתוצאה תוך הזרמת מים מינימלית ואז המחיר יהיה כמות המים שהועברו)

דוגמא: פאזל

נתון פזל של 9 משבצות. 8 מתוך המשבצות מסומנות בספרות 1 עד 8. המשבצת התשיעית ריקה. עליכם לסדר את הפאזל בסדר מספרים עולה ע"י הזזת משבצות למשבצת הריקה.



ייצוג בעית הפאזל באמצעות מרחב מצבים

מרחב המצבים: $S=\{\langle t_1,\cdots,t_9\rangle | 0\le t_i\le 8, t_i\ne t_j\}$ 0 מסמל את המשבצת הריקה. זהו מרחב הפרמוטציות על הקבוצה $\{0,\cdots,8\}$

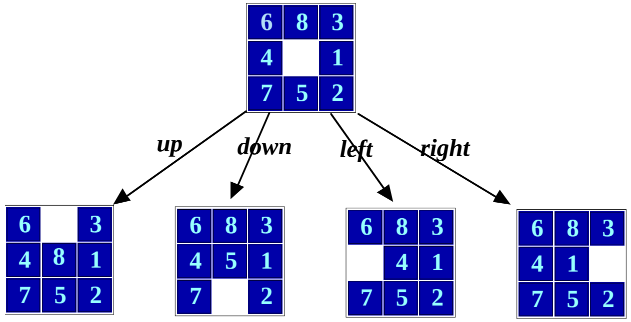
מצב התחלתי:

$s_i=\langle 4,2,8,5,0,1,7,6,3\rangle$

מצב סופי

$s_g=\langle 1,2,3,4,0,5,6,7,8\rangle$

אופרטורים:

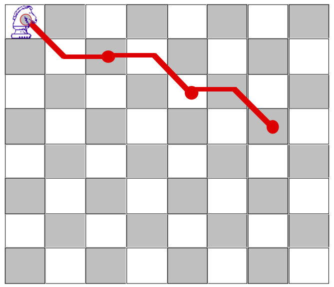


$O=\{up,down,left,right\}$

כאשר שם האופרטור מסמל את כיוון הזזת המשבצת הריקה.

דוגמא: חידת הסוס

- נתון לוח שחמט (ריק) וסוס שעומד באחת הפינות. מצא מסלול של מהלכי סוס שיכסה את כל משבצות הלוח, ולא יבקר פעמיים באותה משבצת.



מרחב המצבים:

$$S=\left\{(\langle 1,1\rangle,\langle r_2,c_2\rangle,\cdots,\langle r_n,c_n\rangle)\ \middle|\ \begin{array}{l}0\le n\le 64,\\ 1\le r_i,c_i\le 8\end{array}\right\}$$

מצב התחלתי $\{(\langle 1,1\rangle)\}$

מצב סופי $Final\_State(s)\Leftrightarrow length(s)=64$

אופרטורים $O=\left\{\begin{array}{l}\langle -1,-2\rangle,\langle -2,-1\rangle,\langle -2,1\rangle,\langle -1,2\rangle,\\ \langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,-1\rangle,\langle 1,-2\rangle\end{array}\right\}$

הערה: זו דוגמא לבעיה בה מסלול הפתרון אינו רלוונטי. המצב הסופי מכיל את הפתרון

דוגמא: מציאת דרך במפה.

נתונים אוסף כל הצמתים בחיפה כאשר לכל צומת מספר מזהה. נתונה מפת חיפה בצורת זוגות של מספרי צמתים בעיר . P={⟨t1,t2⟩ ......}

- זוג מספרים ⟨n1,n2⟩ אומר כי קיים כביש המחבר את n1 ל n2 ומותרת התנועה בכיוון זה.
- מצא דרך המובילה מצומת מרכז חורב (מס. 231) לצומת הכניסה לטכניון (מס. 75).

ייצוג בעית הניווט באמצעות מרחב מצבים

מרחב המצבים $S = \{t_1, \cdots, t_n\}$

כאשר t_i הינם מספרי צמתים.

מצב התחלתי $S_i = 231$

מצב סופי $S_g = 75$

פונקציית מעבר $succ(t) = \{x | \langle t, x \rangle \in P\}$

(כלומר כל הצמתים השכנים לצומת הנתון).

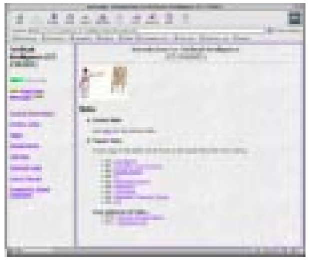
פונקציית המחיר ÆÌÈ˙Ó˘ È˘ ÔÈ· ˘È·Î‰ Í¯Â‡

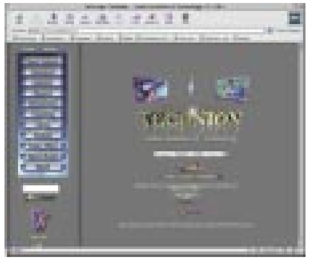
‰˙Ó‰ ÔÓÊ ÂÏÏÎÈ˘ ˙ÂÙÒÂ ¯ÈÁÓ ˙ÂÈ˘ÂÙ ÏÚ ·Â˘

ÆÂÎÂ ˙¯˙ÂÓ ˙ÈÏÓÈÒ˜Ó ˙Â¯È‰Ó

חיפוש ב-web

- נתון דף הבית של הטכניון. נתון פרדיקט המקבל כקלט דף HTML ומחזיר TRUE אםם הדף הינו דף הבית של הקורס בנושא "בינה מלאכותית".
- מצאו את דף הבית של הקורס.





ייצוג בעית החיפוש ב-web באמצעות מרחב מצבים

- מרחב המצבים: ה-web.
- מצב התחלתי: דף הבית של הטכניון.
- מצב סופי: דף הינו דף סופי אם הפרדיקט הנתון מחזיר עליו TRUE.
- פונקציית מעבר $Succ(s) = \{h | link(s,h) \wedge domain(h) = "technion.ac.il"\}$

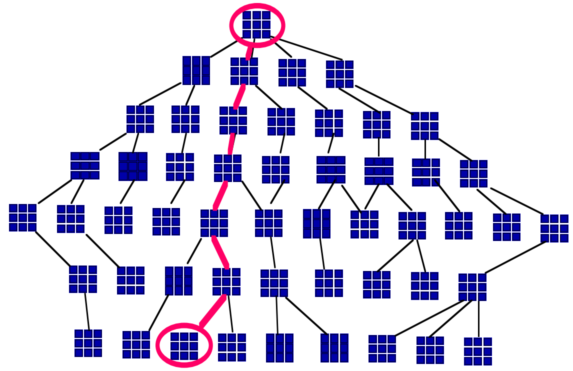
הערה: גם בבעיה זו מסלול ההגעה לפתרון אינו רלוונטי. המצב הסופי עצמו מהווה את הפתרון.

פתרון בעיות = חיפוש במרחב מצבים

- מרחב המצבים הינו גרף מכוון
- חיפוש פתרון לבעיה = חיפוש מסלול בגרף ממצב ההתחלה למצב הסיום.
- בתורת הגרפים פתחו אלגוריתמים לחיפוש מסלול בגרף.
- אלגוריתמים אלו מניחים שנתונה רשימה של כל צמתי הגרף. כלומר הגרף נתון בצורה מפורשת.
- במרחב מצבים נתון רק המצב ההתחלתי ודרך להגיע מכל מצב למצבים הבאים אחריו. זהו גרף לא מפורש.
- חלק מהאלגוריתמים של תורת הגרפים מבצעים פעולות לא ישימות באופן ישיר בגרף לא מפורש כגון סימון צמתים.

פתרון לחיפוש

- בד״כ פונקציית החיפוש צריכה להחזיר פתרון.
- הפתרון הוא בד״כ סדרת המצבים המובילה ממצב ההתחלה למצב הסיום.
- לחילופין ניתן לעתים להציג את הפתרון כסדרת אופרטורים.
- לפעמים אנו מעונינים במצב הסופי ולא מתעניינים במסלול.



אסטרטגיות חיפוש

- אסטרטגית חיפוש מגדירה כיצד יש לחפש במרחב
- כל אסטרטגיות החיפוש מתחילות לחפש מהמצב ההתחלתי.
- כל האסטרטגיות מבצעות סדרה של פיתוחי צמתים (הפעלה של פונקציית המעבר כדי לקבל את קבוצת המצבים הבאים).
- האסטרטגיות נבדלות בצורה בה הן בוחרות את הצומת הבא לפיתוח.
- האסטרטגיות נבדלות גם בהחלטה אילו מצבים ישמרו בזיכרון.

מדדים להערכת חיפוש

קיימים שני סוגים עיקריים של מדדים להערכת תוצאות החיפוש:

- משאבי חיפוש

- טיב פתרון

משאבי חיפוש

- המשאב המרכזי אותו צורכת פרוצדורת החיפוש הינו זמן מעבד.
- כיוון שמדד הזמן תלוי בהרבה גורמים לא רלוונטיים נוהגים להשתמש במקומו במספר הצמתים שפותחו במהלך החיפוש (יקרא בקיצור - מספר צעדי חיפוש). פיתוח צומת = הפעלת פונקציית המעבר עליו
- מספר הצמתים שנוצרו במהלך החיפוש (ע״י הפעלת פונקציית המעבר). לכל צומת S שמפותח נוצרים $|succ(s)|$ צמתים.
- מספר הצמתים המקסימלי בזיכרון בזמן החיפוש. אסטרטגיות רבות נכשלות דווקא בגלל בעיות זיכרון.

איכות פתרון

- המדד הנפוץ ביותר להערכת טיב הפתרון הינו המחיר שלו (על פי פונקציית המחיר הנתונה), כלומר סכום המחירים על הקשתות שלו.

- כאשר מסלול הפתרון אינו רלוונטי נמדדת האיכות ע״י הפעלת פונקצית תועלת על המצב הסופי המוחזר.