בעיית הנישואים היציבים

נתונים n נשים ו-n גברים. לכל אחת ואחד יש סדר עדיפות של בני המין האחר. צריך לחתן את כולם, כך שהתוצאה תהיה יציבה.

חוסר יציבות: אם א׳ נשואה ל-ב׳ ו-ג׳ נשואה ל-ד׳ ומתקיים אחד המצבים הבאים:

1. א׳ מעדיפה את ד׳ על ב׳ ו-ד׳ מעדיף את א׳ על ג׳.
2. ב׳ מעדיף את ג׳ על א׳ ו-ג׳ מעדיפה את ב׳ על ד׳.

סימון: X היא קבוצת הנשים, Y היא קבוצת הגברים. לכל $x \in X \cup Y$ יש רשימת עדיפות L_x, שהיא פרמוטציה על Y (אם $x \in X$) או על X (אם $x \in Y$).

הדגמה

$X = \{w_1, w_2\}$ $L_{w1} = (m_1, m_2)$ $L_{w2} = (m_1, m_2)$
$Y = \{m_1, m_2\}$ $L_{m1} = (w_1, w_2)$ $L_{m2} = (w_1, w_2)$

פתרון יציב:

(w_1, m_1) (w_2, m_2)

פתרון לא יציב:

(w_1, m_2) (w_2, m_1)

$L_{w1} = (m_1, m_2)$ $L_{w2} = (m_2, m_1)$
$L_{m1} = (w_2, w_1)$ $L_{m2} = (w_1, w_2)$

פתרונות יציבים:

(w_1, m_1) (w_2, m_2)
(w_1, m_2) (w_2, m_1)

תאור לא פורמלי של האלגוריתם

צד אחד (הנשים בקוד שנביא להלן) יציע נישואין, והצד השני יקבל או ידחה את ההצעות. השיטה:

- בוחרים אישה x שאינה משודכת ועדיין לא ניסתה את כל הגברים.
- האישה x מציעה נישואין ל-y שהוא הראשון ברשימה שלה שעדיין לא ניסתה.
- אם y לא משודך, אזי x ו-y משתדכים.
- אם y משודך, אבל מעדיף את ההצעה החדשה, אזי x ו-y משתדכים.
- הפלט הוא אוסף הזוגות המשודכים בסוף.

אלגוריתם Gale-Shapley

בן או בת הזוג

Gale-Shapley(X,Y,L)
  for each $x \in X \cup Y$ do $M[x] \leftarrow$ nil
  for each $x \in X$ do $j_x \leftarrow 0$ מונה של מספר הצעות הנישואין
  while $\exists x \in X$, $M[x]$ = nil $\wedge$ $j_x < n$ do
    $y \leftarrow L_x[{+}{+}j_x]$
    if $M[y]$ = nil then
      $M[x] \leftarrow y$, $M[y] \leftarrow x$
    else if $R_y[x] < R_y[M[y]]$ then
      $M[M[y]] \leftarrow$ nil, $M[x] \leftarrow y$, $M[y] \leftarrow x$
    end if
  end while
return M

המיקום של x ברשימה של y

סיבוכיות

בכל איטרציה של לולאת ה-while אחד המונים j_x מקודם ב-1. לכן, מספר האיטרציות הוא $\geq n^2$.

שאלה למחשבה: האם אכן ייתכן שהאלגוריתם יזדקק לסדר גודל של n^2 איטרציות?

ניתוח

תהי $X \in x$. אזי סדרת הגברים ש-x משתדכת אליהם במהלך ריצת האלגוריתם מסודרת בסדר עדיפות יורד מבחינתה של x.

יהי $Y \in y$. אזי סדרת הנשים ש-y משתדך אליהן במהלך ריצת האלגוריתם מסודרת בסדר עדיפות עולה מבחינתו של y.

ניתוח (המשך)

טענה: פלט האלגוריתם M הוא שידוך מושלם.

הוכחה: תהי $X \in x$. נראה כי בכל שלב במהלך ריצת האלגוריתם, אם $M[x] = nil$ אזי יש $y \in Y$ ש-x עדיין לא ניסתה להשתדך אליו. נניח בשלילה שזה לא נכון. כלומר, x ניסתה את כל הגברים ב-Y. נתבונן ב-$y \in Y$. כאשר x ניסתה אותו, או שהשתדכה אליו, או ש-y נותר משודך למישהי אחרת. בכל מקרה, y היה משודך אז, ולכן נותר משודך כעת. מכאן, כל $y \in Y$ משודך כעת, אבל זו סתירה לכך ש-x לא משודכת, שכן $|X| = |Y| = n$.

לכן, בתום ריצת האלגוריתם כל אישה חייבת להיות משודכת (אחרת נותר ברשימתה גבר שלא נבדק), ולכן הפלט הוא שידוך מושלם. $\therefore$

ניתוח (המשך)

משפט: פלט האלגוריתם M מייצג נישואים יציבים.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. כלומר, יש שני זוגות (w_2,m_2), (w_1,m_1) עבורם w_1 מעדיפה את את m_2 ו- m_2 מעדיף את w_1.

לפי האלגוריתם, הגבר האחרון ש- w_1 הציעה לו נישואין הוא m_1. אבל m_2 נמצא בעדיפות גבוהה יותר מ-m_1 ברשימה של w_1. לכן, חייב להיות ש-w_1 בדקה את m_2 לפני שהגיעה ל- m_1. אבל w_1 לא נשואה ל- m_2, כלומר m_2 השתדך בשלב כלשהו לאישה w_3 שעדיפה בעיניו על w_1. סדרת השידוכים של m_2 רק משתפרת במהלך ריצת האלגוריתם, ולכן גם השידוך הסופי w_2 עדיפה בעיניו על w_1, בסתירה להנחה שבשלילה. $\therefore$

ניתוח (המשך)

עבור $X \ni x$ נאמר ש-$Y \ni y$ הוא בן זוג אפשרי אםם יש פתרון כלשהו לבעיית הנישואים היציבים שכולל את הזוג (x,y). באופן דומה נגדיר בת זוג אפשרית עבור $Y \ni y$.

נסמן ב-best(x) את בן הזוג האפשרי העדיף ביותר עבור x, וב-worst(y) את בת הזוג האפשרית עם העדיפות הנמוכה ביותר עבור y.

משפט: אלגוריתם Gale-Shapley תמיד משדך לכל אישה $X \ni x$ את best(x) ולכל גבר $Y \ni y$ את worst(y)

ניתוח (המשך)

הוכחה: נניח בשלילה שיש ריצה של האלגוריתם עבורה אישה כלשהי לא נשואה לבן הזוג האפשרי העדיף ביותר עבורה. אזי במהלך ריצת האלגוריתם חייבת להיות אישה כלשהי x שעבורה best(x) דוחה או מבטל הצעת נישואין מ-x. נתבונן בפעם הראשונה שזה קורה. אחרי הדחייה או הביטול מתקיים כי best(x) הסכים (לפחות זמנית) להצעה מ-x ≠ x'. אבל יש נישואים יציבים שבהם x נשואה ל-best(x), ולכן x' נשואה ל-y' ≠ best(x). לפי התנהגות best(x) במהלך ריצת האלגוריתם הוא מעדיף את x' על x, ולכן חייב להיות ש-x' מעדיפה את y' על best(x). לכן, y' דחה או ביטל הצעה מ-x' לפני ש-x' השתדכה ל-best(x), וזו סתירה לכך שהדחייה או הביטול של הצעת x ל-best(x) היא הראשונה מסוגה.

ניתוח (המשך)

כעת נניח בשלילה ריצה של האלגוריתם עבורה זוג כלשהו (x,y) בפלט מקיים $x \neq worst(y)$. אז יש פתרון אחר שבו y נשוי ל-x' שהוא מעדיף פחות מ-x. בפתרון זה, x נשואה ל-$y \neq y'$. אבל הראנו כבר שמתקיים כי $y = best(x)$. כלומר, x מעדיפה את y על y'. אם כך, הפתרון האחר אינו יציב, בסתירה להנחה שבשלילה. $\therefore$

מסקנות

לכל קלט לבעיית הנישואים היציבים יש פתרון שבו כל הנשים נשואות לבני הזוג האפשריים העדיפים ביותר עבורן, וכל הגברים נשואים לבנות הזוג האפשריות עם העדיפות הנמוכה ביותר עבורם.

אם נחליף את התפקידים והגברים יציעו נישואין, נקבל פתרון שבו הגברים זוכים בבנות הזוג האפשריות העדיפות ביותר עבורם, והנשים נשואות לבני הזוג האפשריים הגרועים ביותר עבורן.

הערה: לעיתים אלו הפתרונות היחידים, אבל לפעמים יש פתרונות נוספים, אלא שאלגוריתם Gale-Shapley לא ימצא פתרונות כאלו.