

זרימה ברשתות

פרק 7 ב-Kleinberg/Tardos

רשתות זרימה

שיטת Ford-Fulkerson

שיטת הסילום (scaling)

המימוש של Edmonds-Karp

האלגוריתם של דיניץ

הגדרה: רשת זרימה היא גרף מכוון $G=(V,E)$ בתוספת

פונקציית קיבול $c: E \rightarrow \mathbb{N}$, מקור $s \in V$ ובור $t \in V$.

הגדרה: זרימה ברשת G,c,s,t היא פונקציה f על

הקשתות שמקיימת:

1. $\forall e \in E, 0 \leq f(e) \leq c(e)$.

2. $\forall v \in V \setminus \{s,t\}, \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) = \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e)$

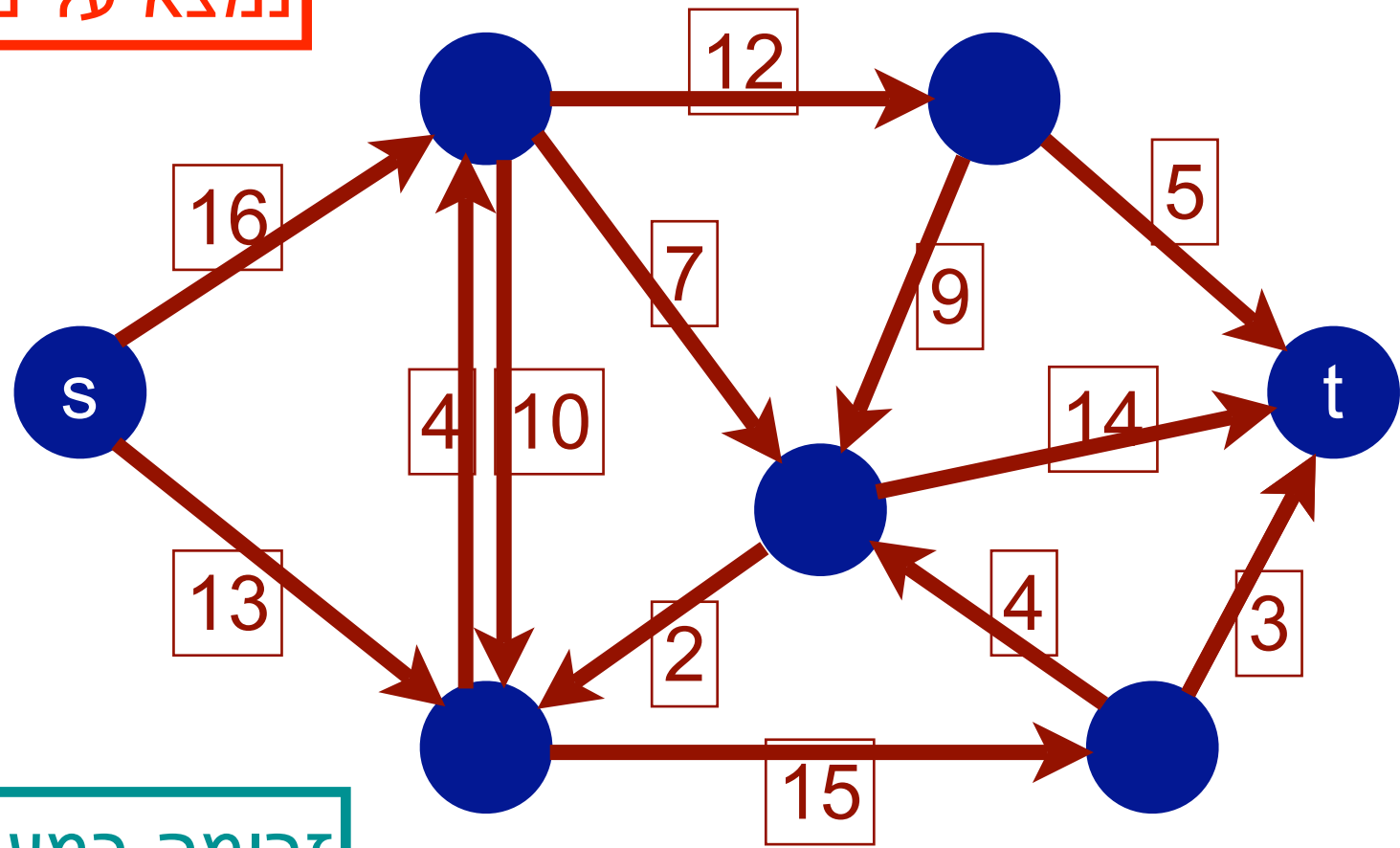
הגדרה: ערך הזרימה הוא

$$|f| = \sum_{e \in \text{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(s)} f(e)$$

הקלט: רשת זרימה G,c,s,t .

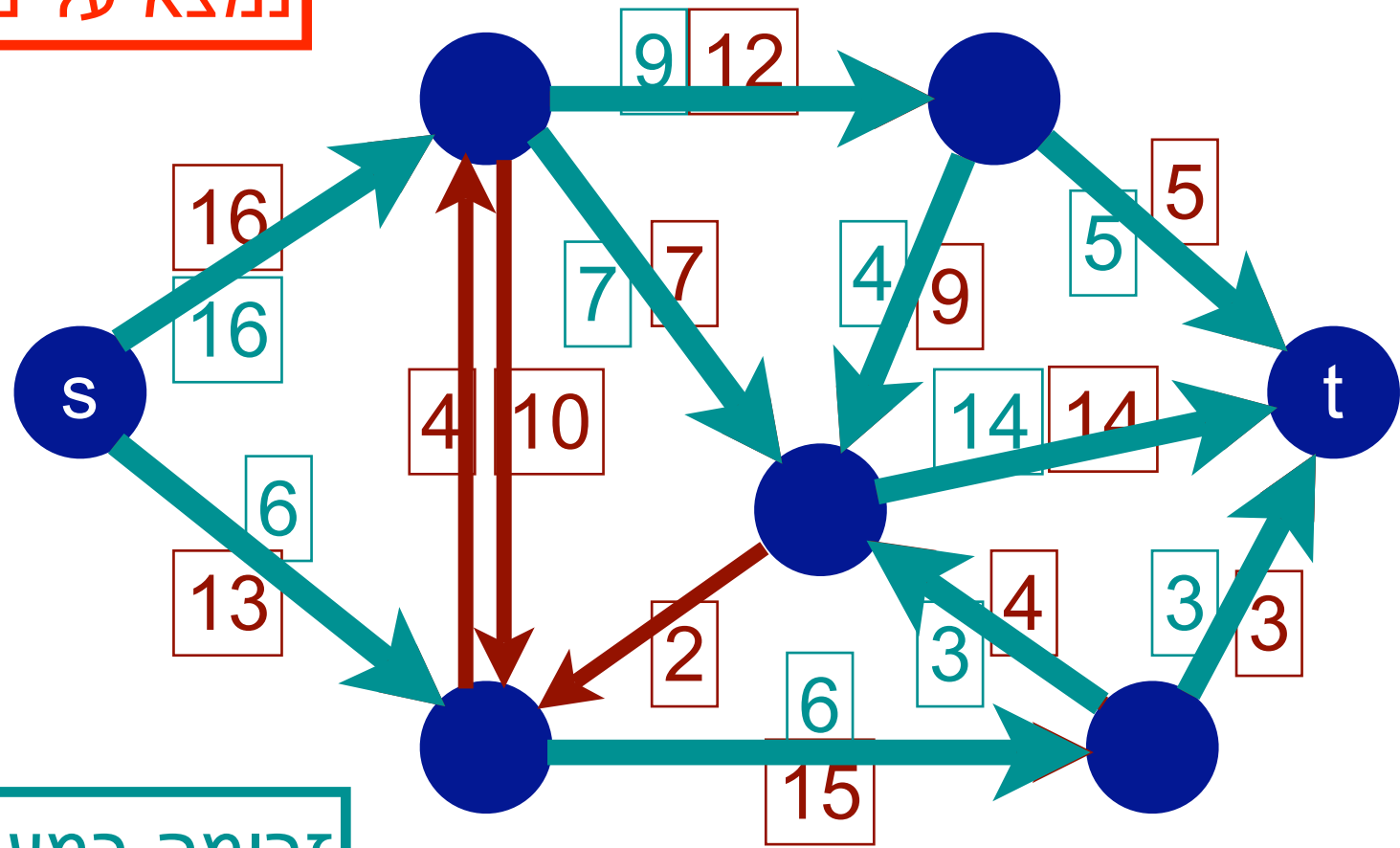
הפלט: זרימה f שערכה $|f|$ מירבי.

אפשר להניח שכל קודקוד נמצא על מסלול מ-s ל-t.



זרימה במעגל אינה מגדילה את ערך הזרימה. בפרט נדאג ש-f תתאפס על לפחות קשת אחת מכל זוג קשתות אנטי-מקבילות.

אפשר להניח שכל קודקוד נמצא על מסלול מ-s ל-t.



זרימה במעגל אינה מגדילה את ערך הזרימה. בפרט נדאג ש-f תתאפס על לפחות קשת אחת מכל זוג קשתות אנטי-מקבילות.

$$|f| = \sum_{e \in \text{in}(t)} f(e) - \sum_{e \in \text{out}(t)} f(e)$$

:משפט

$$\begin{aligned}
 |f| &= \sum_{e \in \text{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(s)} f(e) \\
 &= \sum_{v \in V \setminus \{s\}} \left(\sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) - \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) \right) \\
 &= \sum_{e \in \text{in}(t)} f(e) - \sum_{e \in \text{out}(t)} f(e) + \\
 &\quad \sum_{v \in V \setminus \{s,t\}} \left(\sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) - \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) \right) \\
 &= \sum_{e \in \text{in}(t)} f(e) - \sum_{e \in \text{out}(t)} f(e) \quad \therefore
 \end{aligned}$$

:הוכחה

הגדרה: **חתך** הוא חלוקה של V לשתי קבוצות לא ריקות S ו- $V \setminus S$, כך ש- $s \in S$ ו- $t \in V \setminus S$. סימון: $(S, V \setminus S)$.

למה: לכל חתך $(S, V \setminus S)$ מתקיים

$$|f| = \sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e) - \sum_{e \in V \setminus S \times S} f(e)$$

$$\sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e) - \sum_{e \in V \setminus S \times S} f(e)$$

הוכחה:

$$= \sum_{e \in S \times V} f(e) - \sum_{e \in V \times S} f(e) +$$

$$\sum_{e \in S \times S} f(e) - \sum_{e \in S \times S} f(e)$$

$$= \sum_{e \in S \times V} f(e) - \sum_{e \in V \times S} f(e)$$

$$= \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) \right)$$

$$= \sum_{e \in \text{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(s)} f(e) +$$

$$\sum_{v \in S \setminus \{s\}} \left(\sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) \right)$$

$$= \sum_{e \in \text{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}(s)} f(e)$$

$$= |f|$$

הגדרה: הקיבול של חתך $(S, V \setminus S)$: $c(S, V \setminus S) = \sum_{e \in S \times V \setminus S} c(e)$

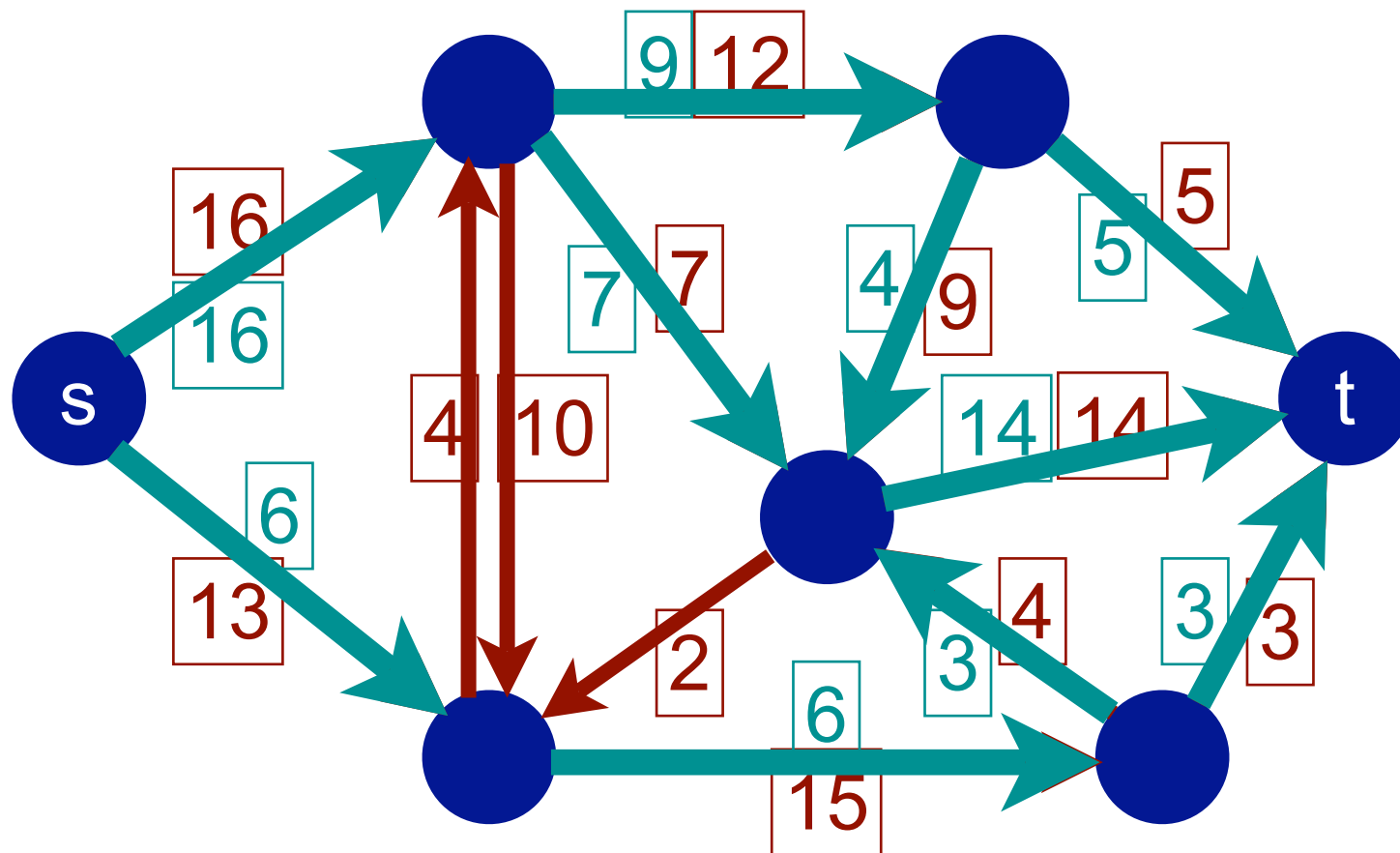
מסקנה (מהלמה): לכל חתך $(S, V \setminus S)$, $|f| \leq c(S, V \setminus S)$

הוכחה: $|f| = \sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e) - \sum_{e \in V \setminus S \times S} f(e)$

$$\leq \sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e)$$

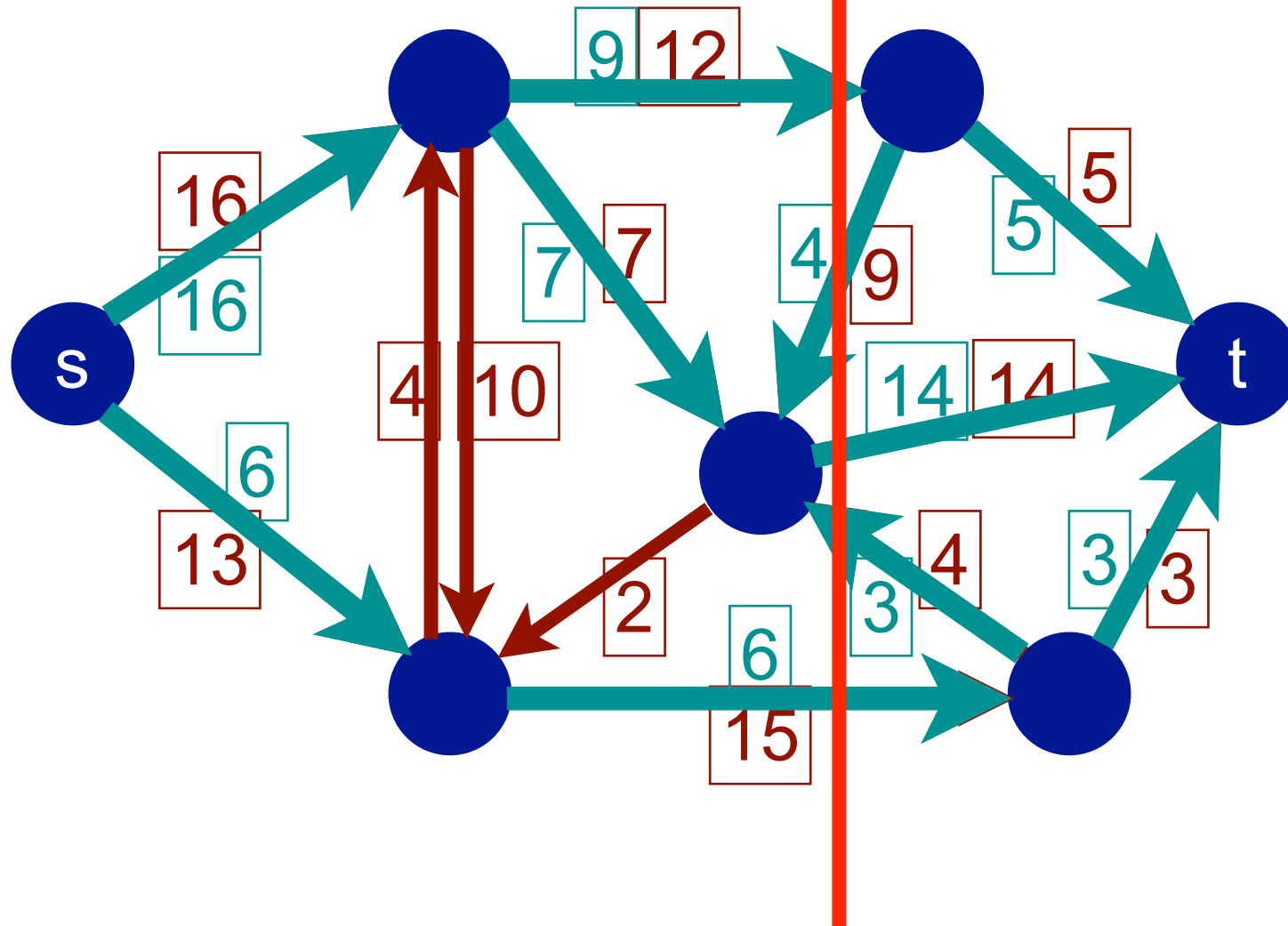
$$\leq \sum_{e \in S \times V \setminus S} c(e)$$

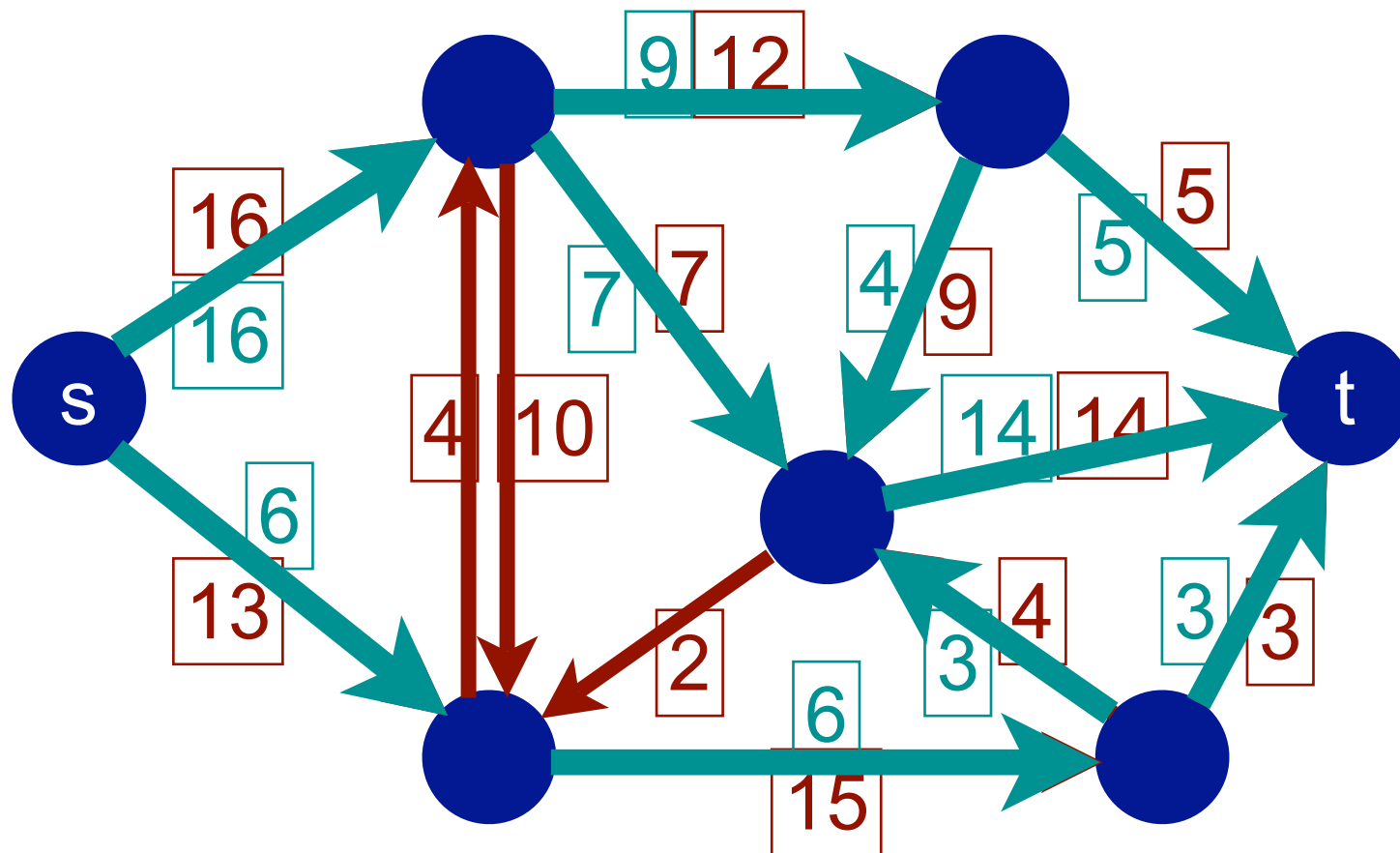
$$= c(S, V \setminus S)$$



$$c(S, V \setminus S) = 41$$

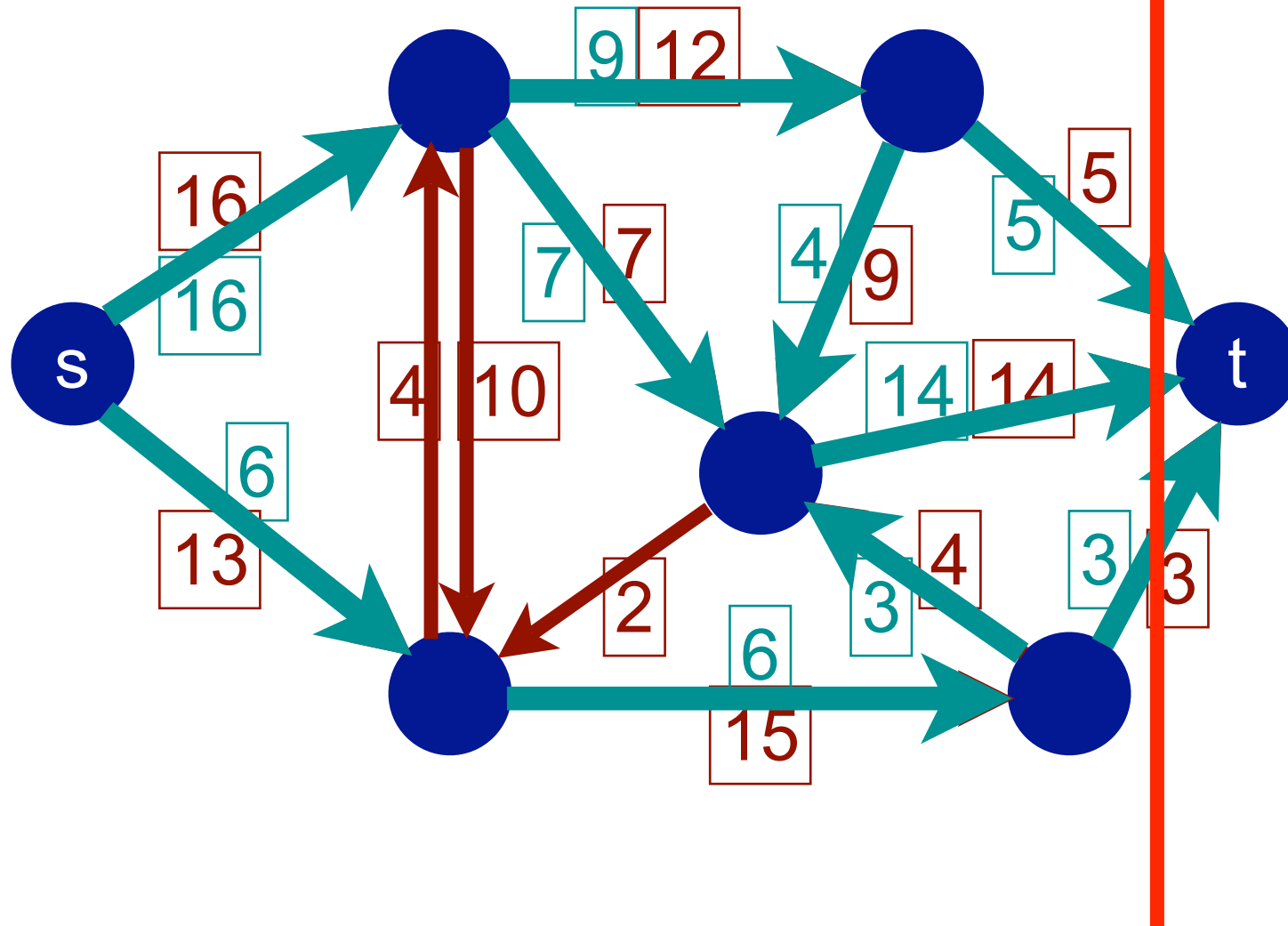
$$\sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e) - \sum_{e \in V \setminus S \times S} f(e) = 22$$





$$c(S, V \setminus S) = 22$$

$$\sum_{e \in S \times V \setminus S} f(e) - \sum_{e \in V \setminus S \times S} f(e) = 22$$



הגדרה: נתונה רשת זרימה G, c, s, t ופונקציה f ברשת זו.
 הרשת השיורית G_f, c_f, s, t נתונה על ידי:

$$G_f = (V, E_f)$$

$$E_f = \{(x, y) \in E : f(x, y) < c(x, y)\} \cup \{(x, y) : (y, x) \in E \wedge f(y, x) > 0\}$$

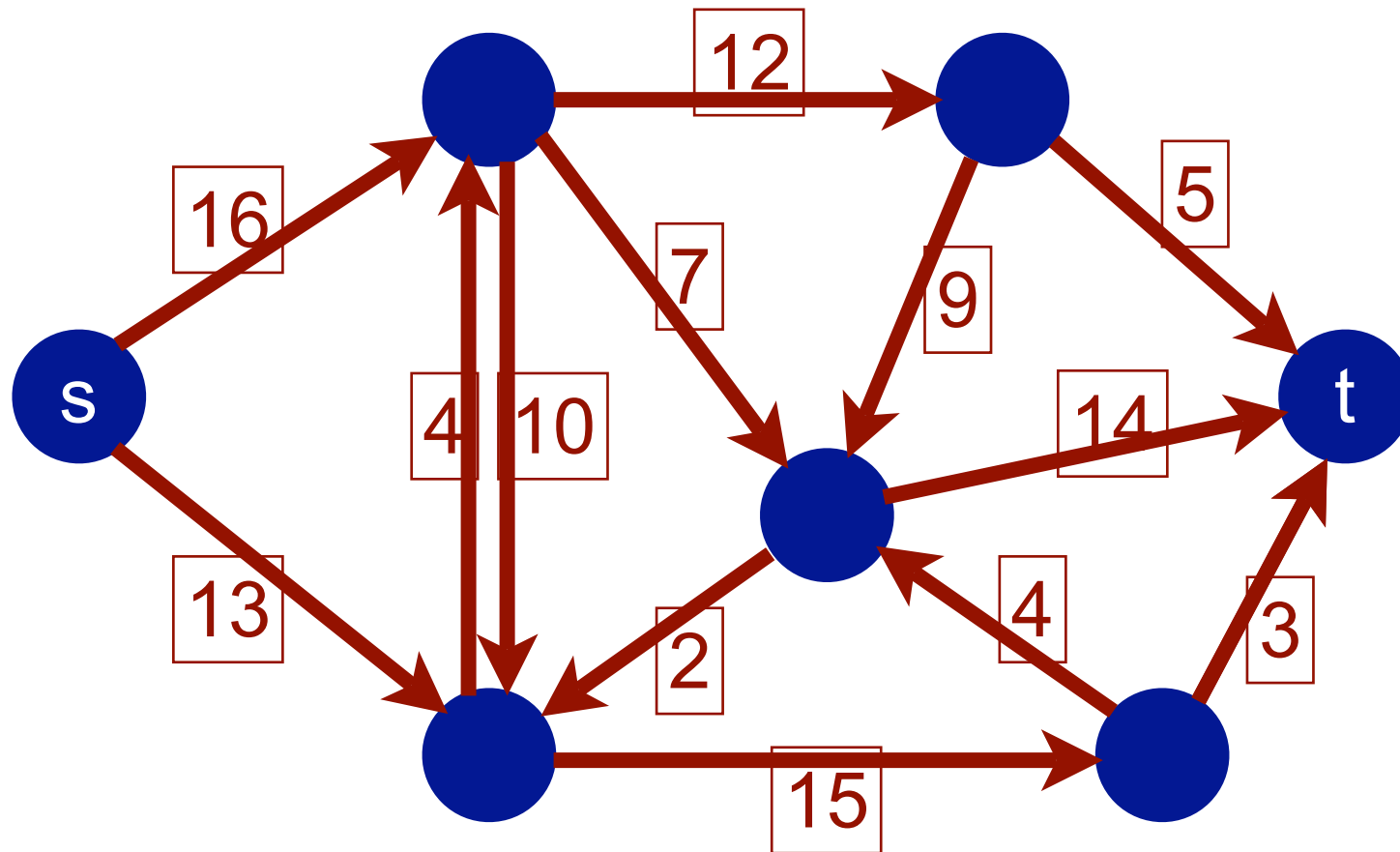
$$c_f(x, y) = \begin{cases} c(x, y) - f(x, y) + f(y, x) & (x, y) \in E \cap E_f \wedge (y, x) \in E \\ c(x, y) - f(x, y) & (x, y) \in E \cap E_f \wedge (y, x) \notin E \\ f(y, x) & (x, y) \in E_f \setminus E \end{cases}$$

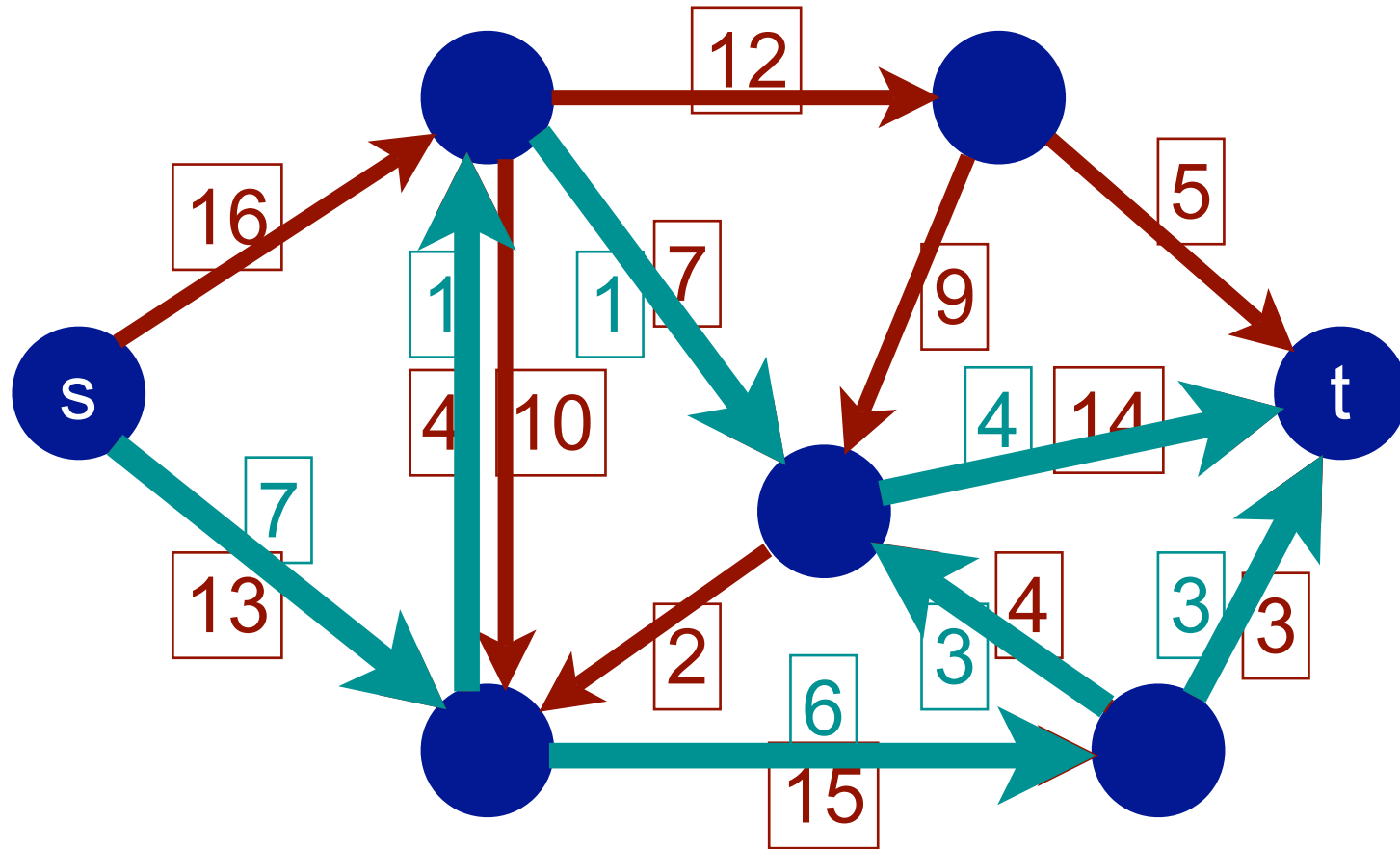
$$(x, y) \in E_f \Rightarrow (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$

שימו לב:

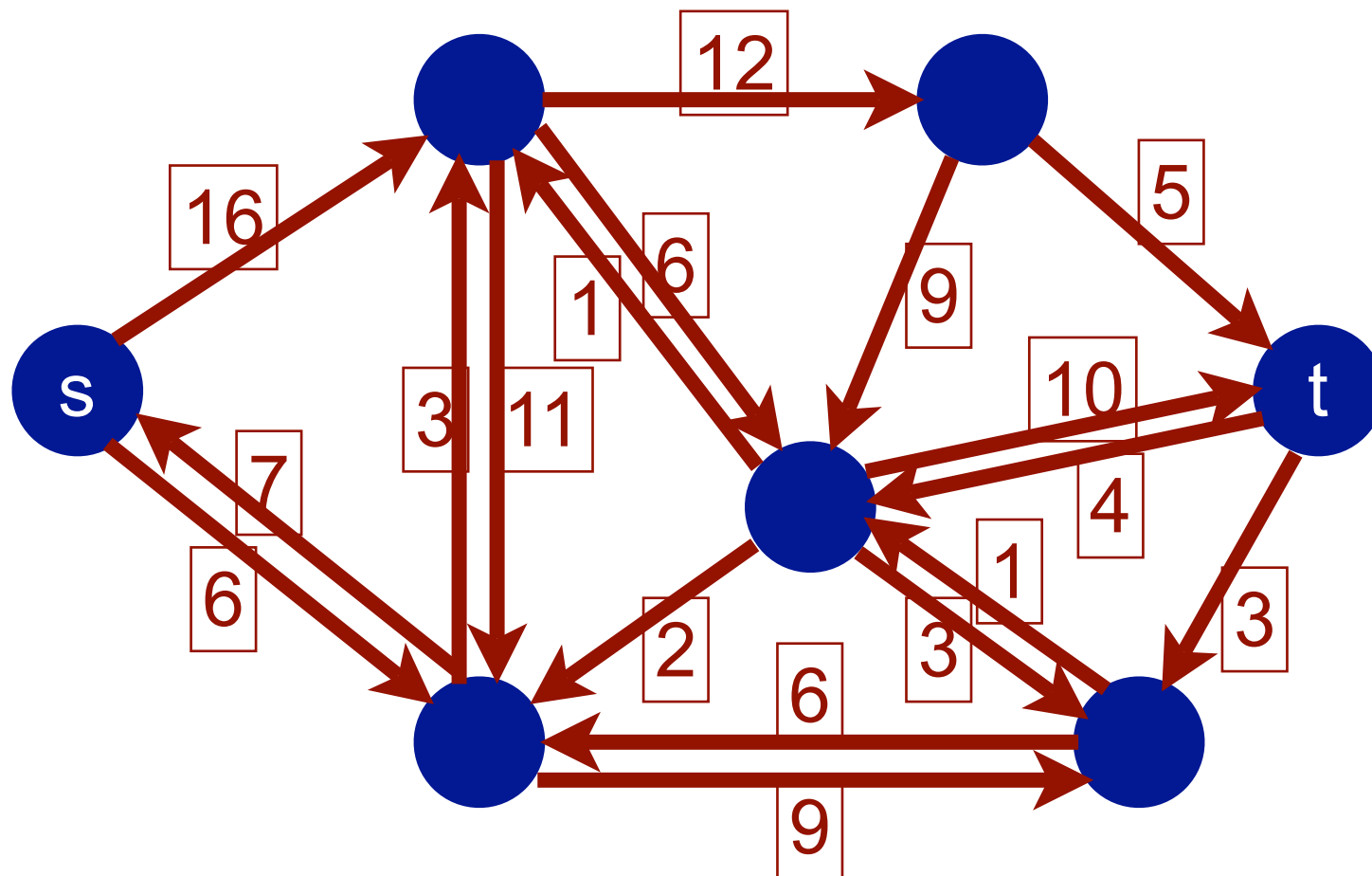
$$|E_f| \leq 2 \cdot |E|$$

לכן:

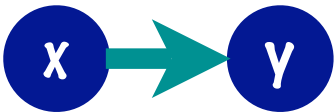
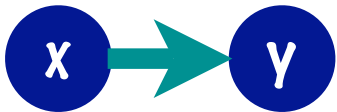
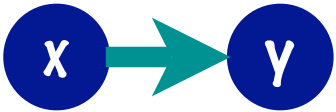


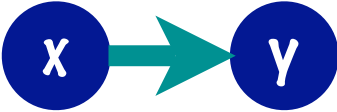






הרשת השיורית



תהי f זרימה ברשת G, c, s, t ותהי g זרימה ברשת השיורית G_f, c_f, s, t
 נגדיר פונקציה $f+g: E \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא:

f	g	$(f+g)(x,y)$ $[(f+g)(y,x)]$
		$f(x,y) + g(x,y)$
		$f(x,y) - g(y,x)$
		$f(x,y) + g(x,y)$
		0
		$\max\{0, f(x,y) - g(y,x)\}$
		$\max\{0, g(y,x) - f(x,y)\}$

טענה: $f+g$ היא זרימה ב- G, c, s, t שערכה: $|f+g| = |f| + |g|$.

הוכחה: קל לוודא על פי הגדרת הקיבול השיורי והזרימה $f+g$ שזרימה זו מקיימת את אילוצי הקיבול c . לגבי כלל שימור הזרימה, נתבונן בצומת x שאיננו המקור או הבור. נסמן ב- A את קבוצת הצמתים y עבורם יש ב- G קשת (x, y) אבל לא (y, x) . נסמן ב- B את קבוצת הצמתים y עבורם יש ב- G קשת (y, x) אבל לא (x, y) . לבסוף, נסמן ב- C את קבוצת שכני x ב- G עם קשתות בשני הכיוונים. לשם נוחות, נרחיב את g לכל זוגות הצמתים. עבור זוג (u, v) שאינו קשת בגרף השיורי, נגדיר $g(u, v) = 0$. נקבל:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \text{out}(x)} (f+g)(e) - \sum_{e \in \text{in}(x)} (f+g)(e) &= \\ \sum_{y \in A} (f+g)(x, y) - \sum_{y \in B} (f+g)(y, x) + \\ &+ \sum_{y \in C} [(f+g)(x, y) - (f+g)(y, x)] = \\ \sum_{y \in A} [f(x, y) + g(x, y) - g(y, x)] - \sum_{y \in B} [f(y, x) + g(y, x) - g(x, y)] + \\ &+ \sum_{y \in C} [f(x, y) - f(y, x) + g(x, y) - g(y, x)] = \\ \sum_{e \in \text{out}(x)} f(e) + \sum_{e \in \text{out}_f(x)} g(e) - \sum_{e \in \text{in}(x)} f(e) - \sum_{e \in \text{in}_f(x)} g(e) &= 0 \end{aligned}$$

הגדרה: בהינתן רשת זרימה G, c, s, t וזרימה f , מסלול פשוט מ- s ל- t ברשת השיורית G_f, c_f, s, t נקרא מסלול משפר.

עבור מסלול משפר p נסמן $c_f(p) = \min_{e \in p} c_f(e)$.

הפונקציה g המוגדרת להלן היא זרימה ברשת השיורית שערכה $|g| = c_f(p) > 0$.

$$g(e) = \begin{cases} c_f(p) & \text{אם } e \in p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מסקנה: אם f זרימת מקסימום, אזי אין ברשת השיורית מסלול משפר.

זרימת מקסימום = חתך מינימום

משפט: תהי f פונקצית זרימה ברשת G, c, s, t . אזי התנאים הבאים שקולים:

1. הזרימה f היא זרימת מקסימום.
2. ברשת השיורית G_f אין מסלול משפר.
3. מתקיים $|f| = c(S, V \setminus S)$ עבור חתך כלשהו $(S, V \setminus S)$ ב- G .

הוכחה: ראינו כבר כי $1 \Leftarrow 2$. נראה $2 \Leftarrow 3$: על פי 2 הקבוצה

$$S = \{v \in V : \exists \text{ path } s \cdots v = p \in G_f\}$$

לא מכילה את t ולכן $(S, V \setminus S)$ הוא חתך. לפי הגדרת S ,

$$(S \times V \setminus S) \cap E_f = \emptyset$$

ולכן, לכל $e \in (S \times V \setminus S) \cap E$ מתקיים $f(e) = c(e)$.

כמו כן, לכל $e \in (V \setminus S \times S) \cap E$ מתקיים $f(e) = 0$.

לכן, $|f| = \sum_{e \in S \times (V \setminus S)} f(e) - \sum_{e \in (V \setminus S) \times S} f(e) = c(S, V \setminus S)$.

לבסוף $3 \Leftarrow 1$ כי לכל זרימה g מתקיים $|g| \leq c(S, V \setminus S)$.

שיטת Ford-Fulkerson

נמצא את κ בעזרת אלגוריתם לקשירות

```
Ford-Fulkerson( $G, c, s, t$ )  
   $f \leftarrow \vec{0}$   
  while  $\exists$  augmenting path  $p \in G_f$  do  
     $g \leftarrow \vec{0}$   
    for each  $e \in p$  do  $g(e) \leftarrow c_f(p)$   
     $f \leftarrow f + g$   
  end while  
return  $f$ 
```

האתחול וכל איטרציה ניתנים למימוש בזמן $O(|E| + |V|)$.

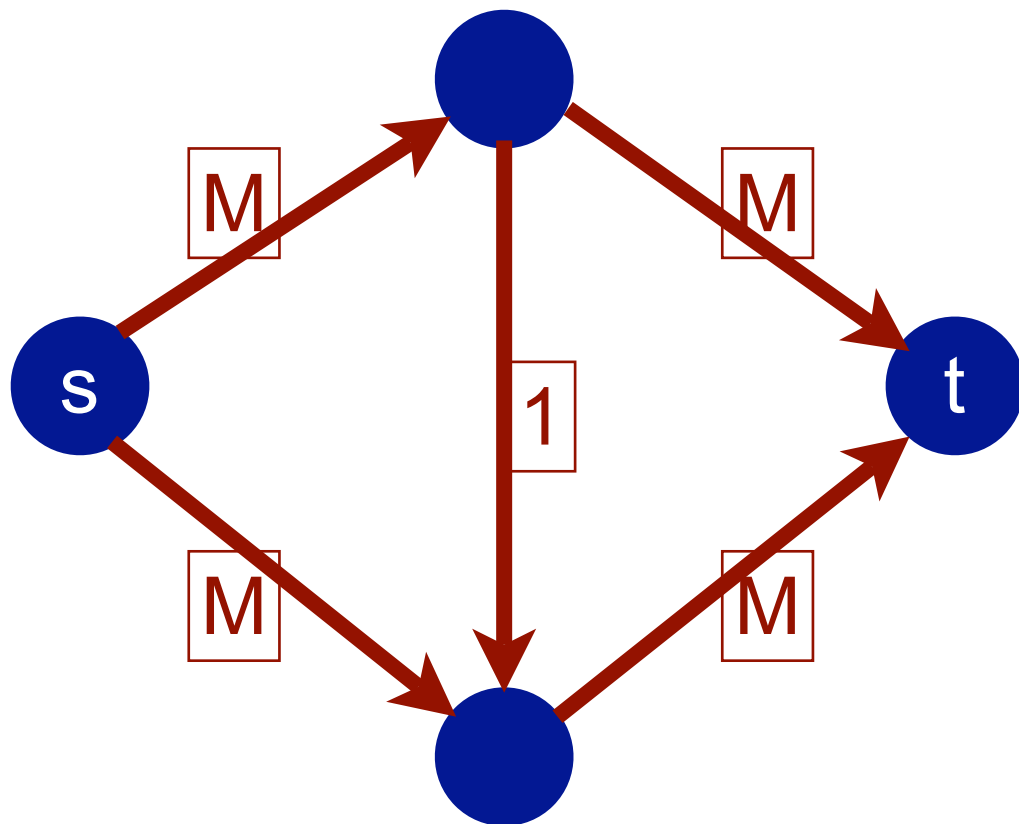
הזרימה f גדלה בכל איטרציה לפחות ב-1, לכן מספר האיטרציות הוא לכל היותר $|f^*|$, באשר f^* זרימת מקסימום.

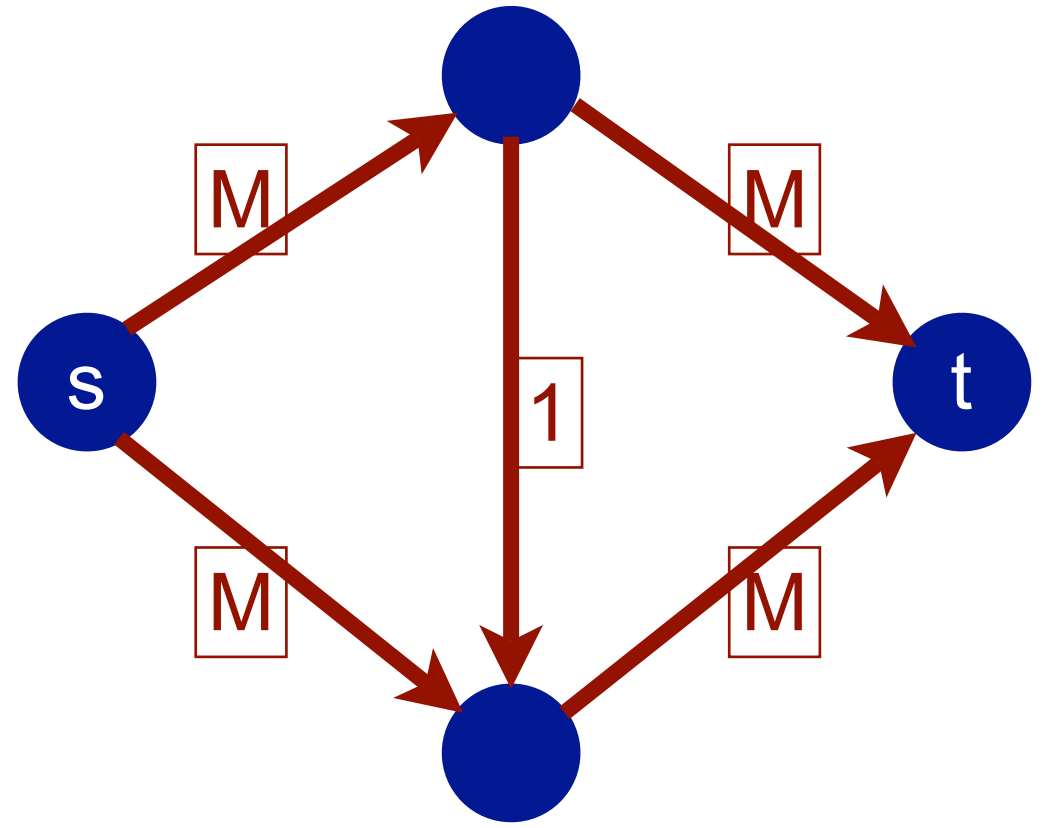
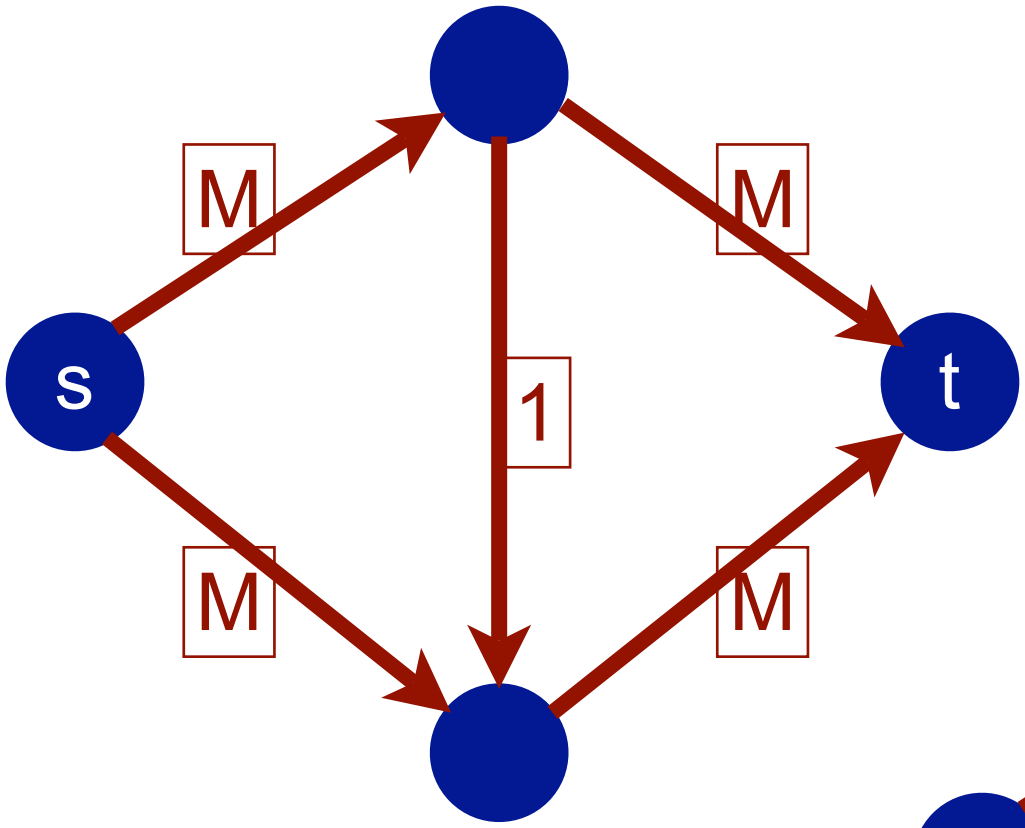
שימו לב ש- $|f^*| \leq \sum_{e \in E} c(e)$

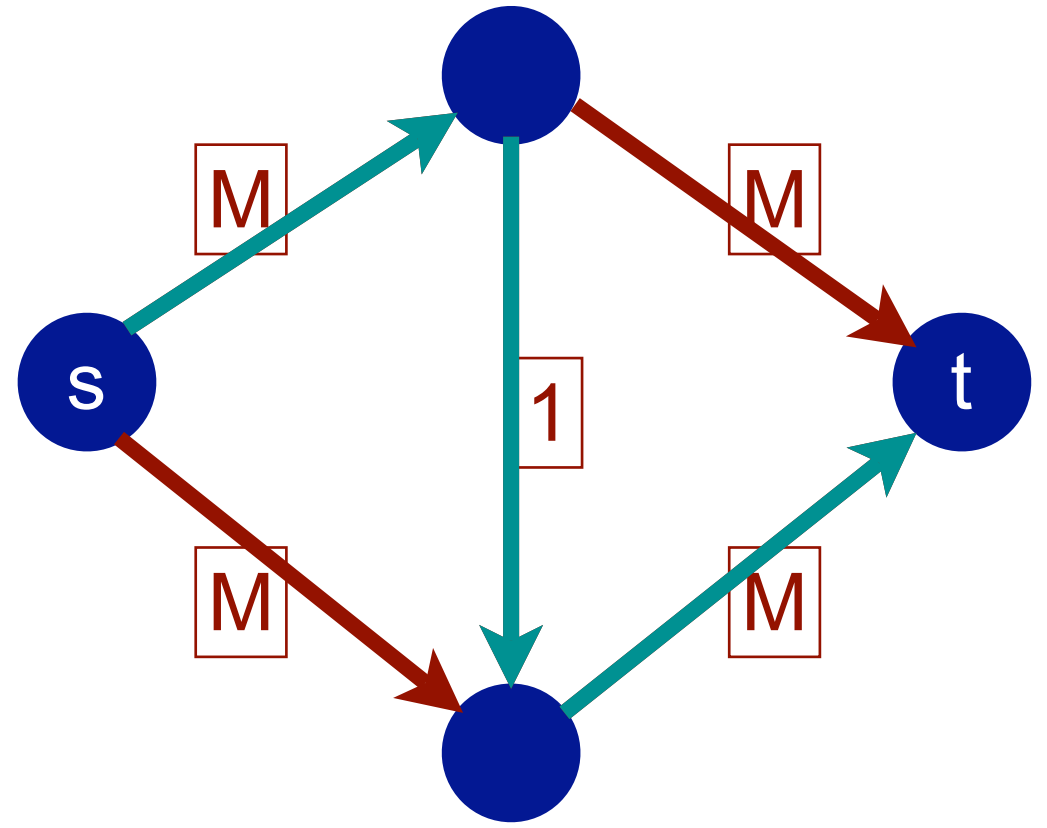
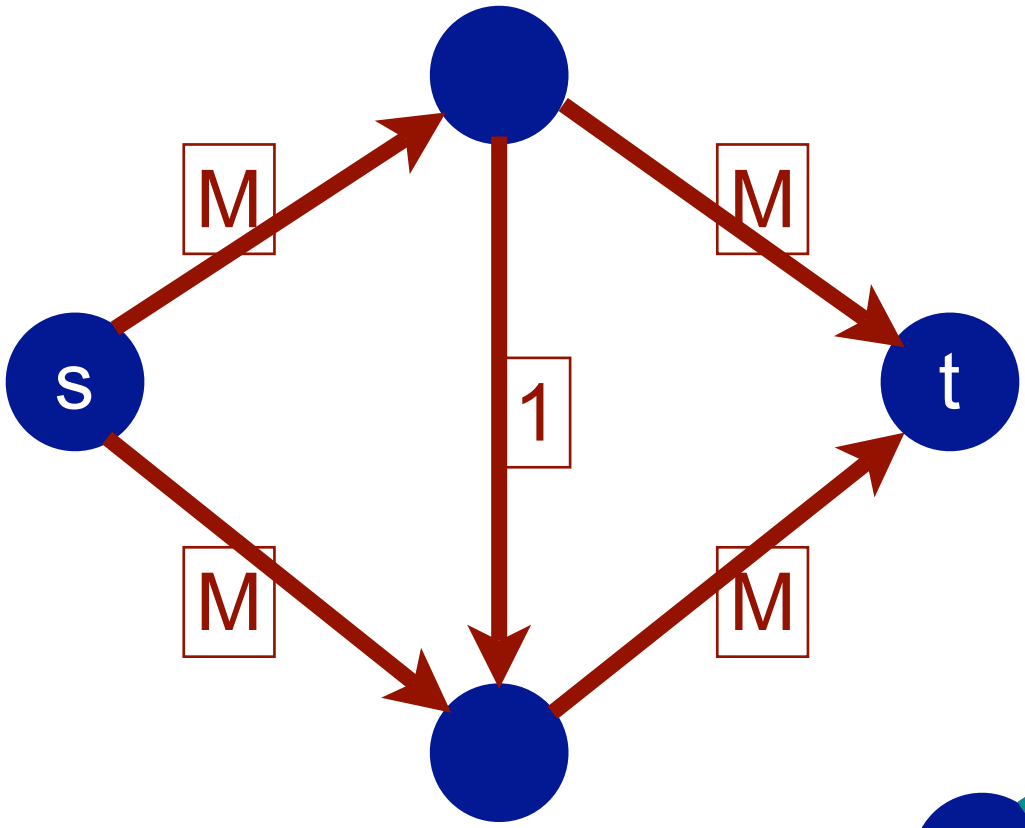
אבל גודל הקלט הוא $\sum_{e \in E} O(\log c(e))$

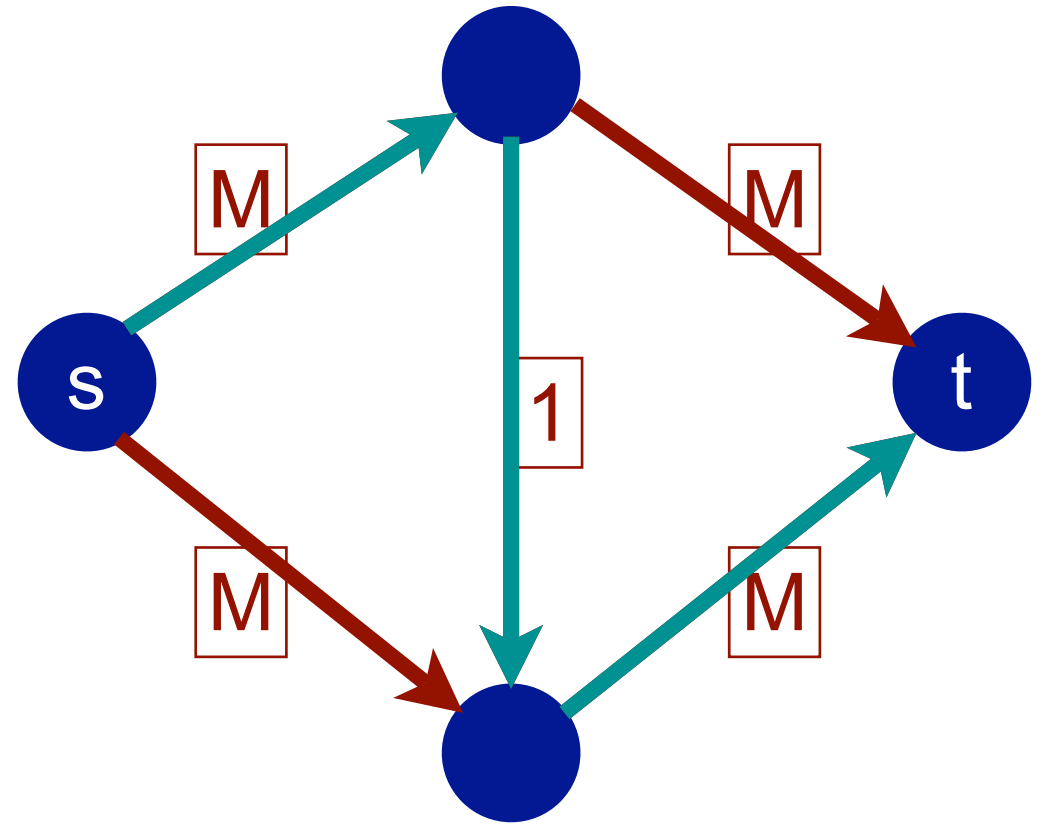
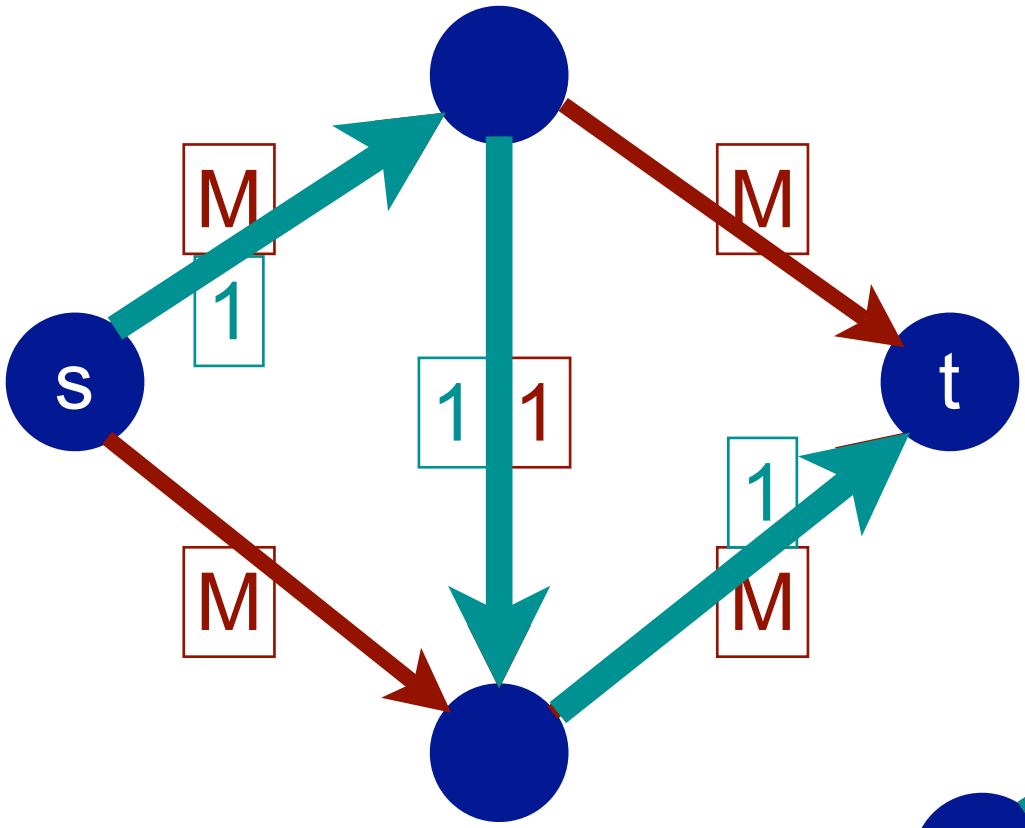
זמן הריצה עלול להיות יותר מפולינומי בגודל הקלט, אם פונקציית הקיבול מקבלת ערכים גדולים.

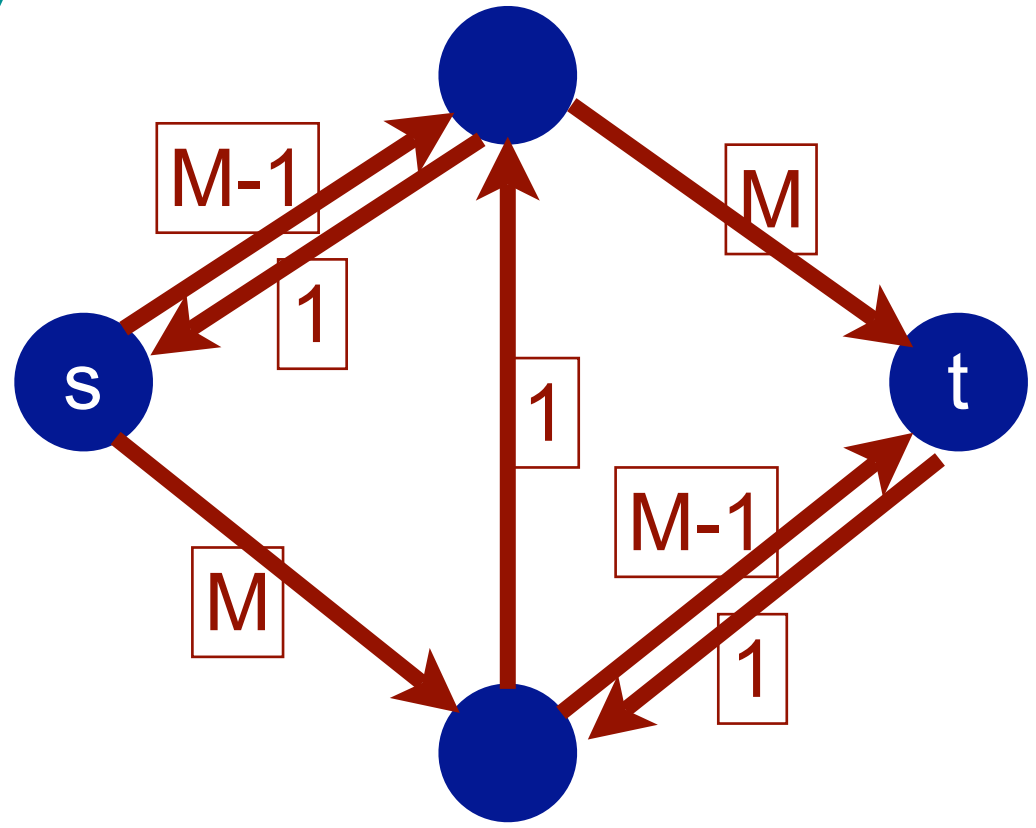
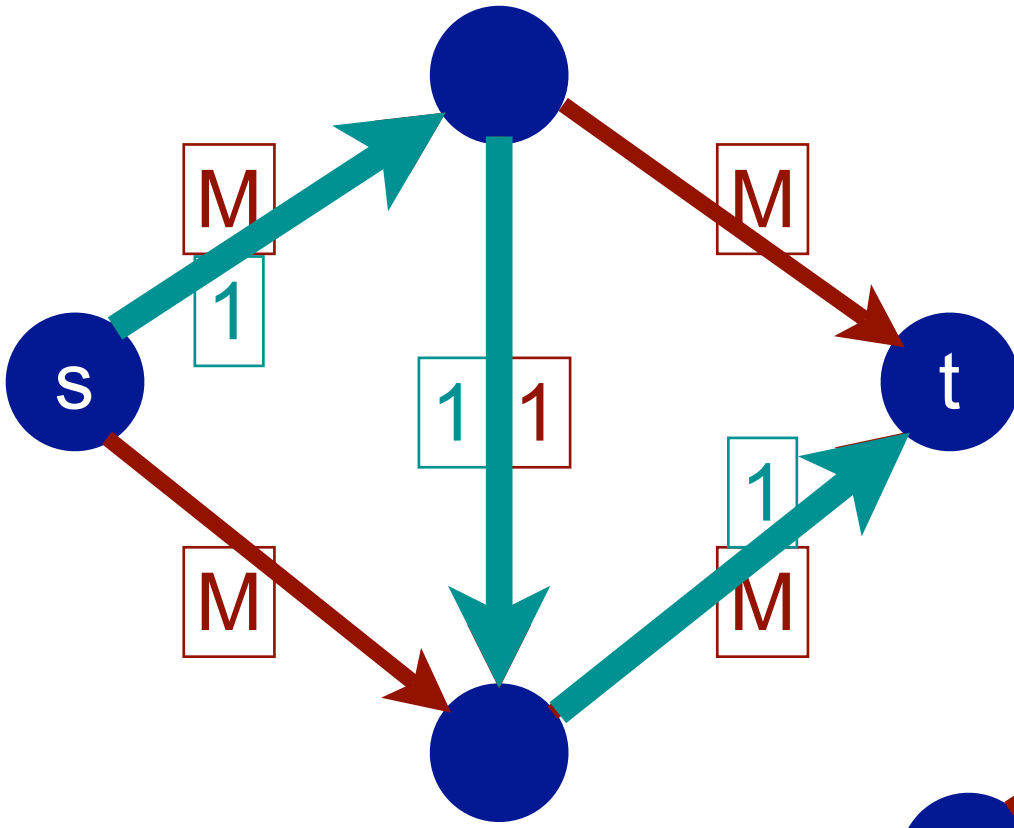
הערה: אם קיבולי הקשתות שלמים (כפי שהנחנו עד עתה), אזי שיטת Ford-Fulkerson מוצאת פונקציית זרימה שכל ערכיה שלמים (זרימה בשלמים). זו תכונה חשובה מאוד לחלק מהשימושים.

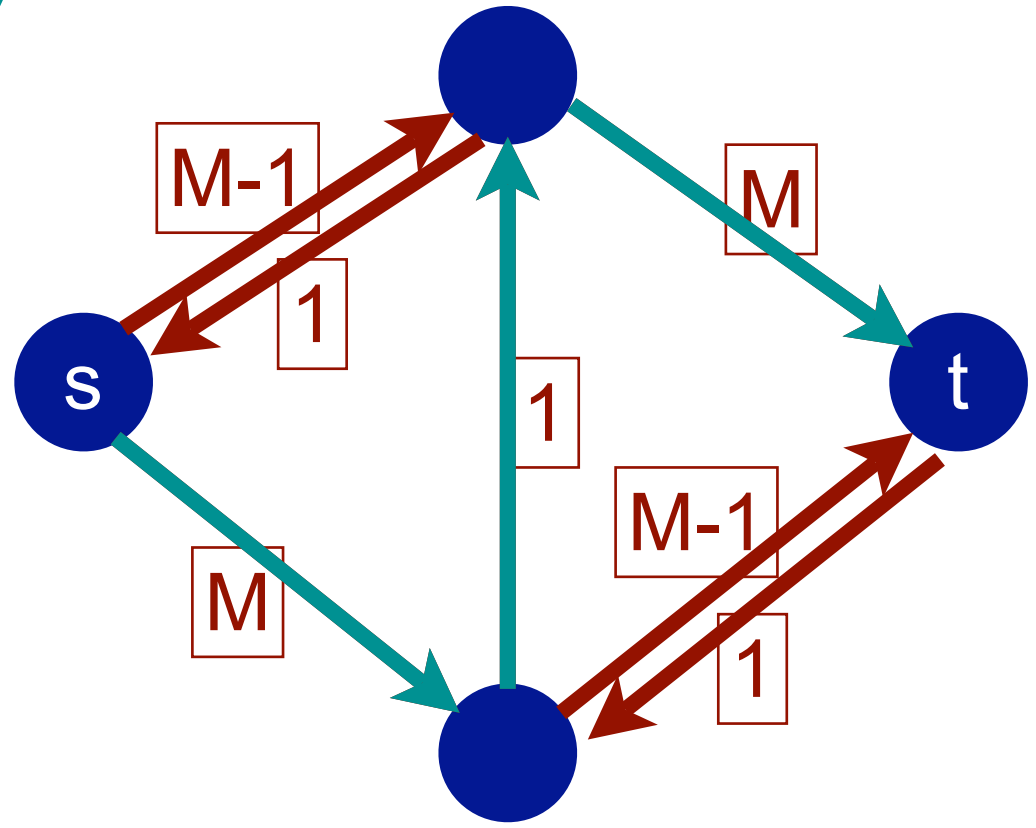
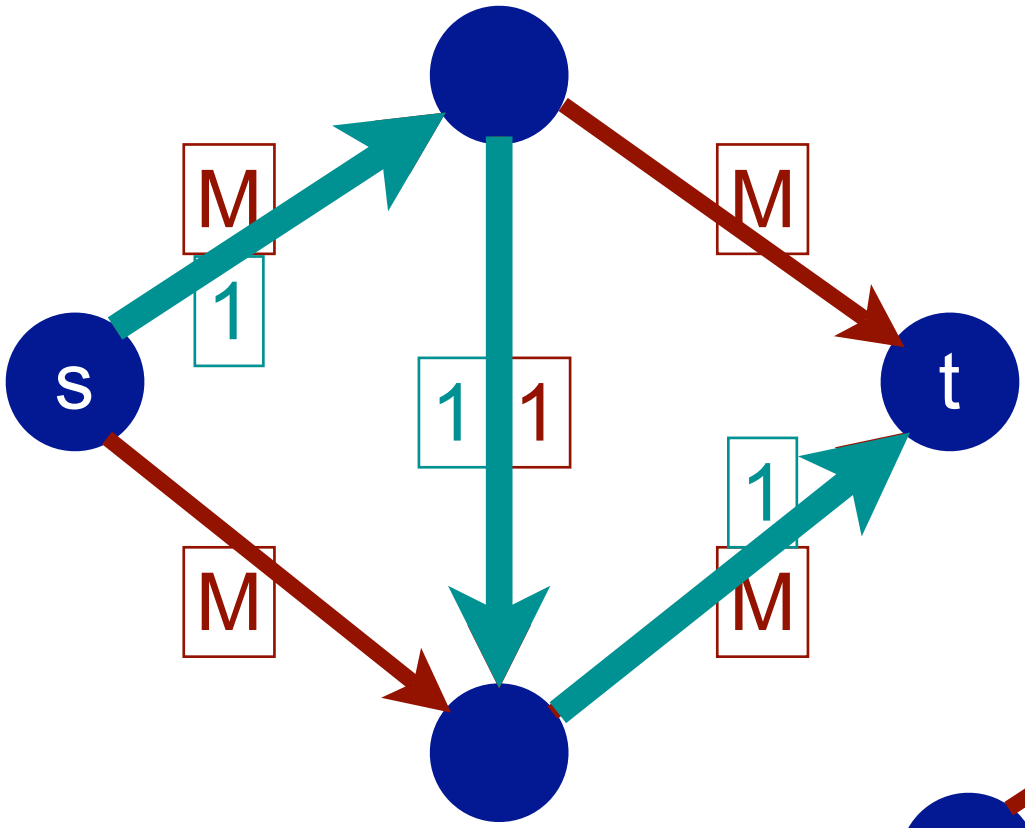


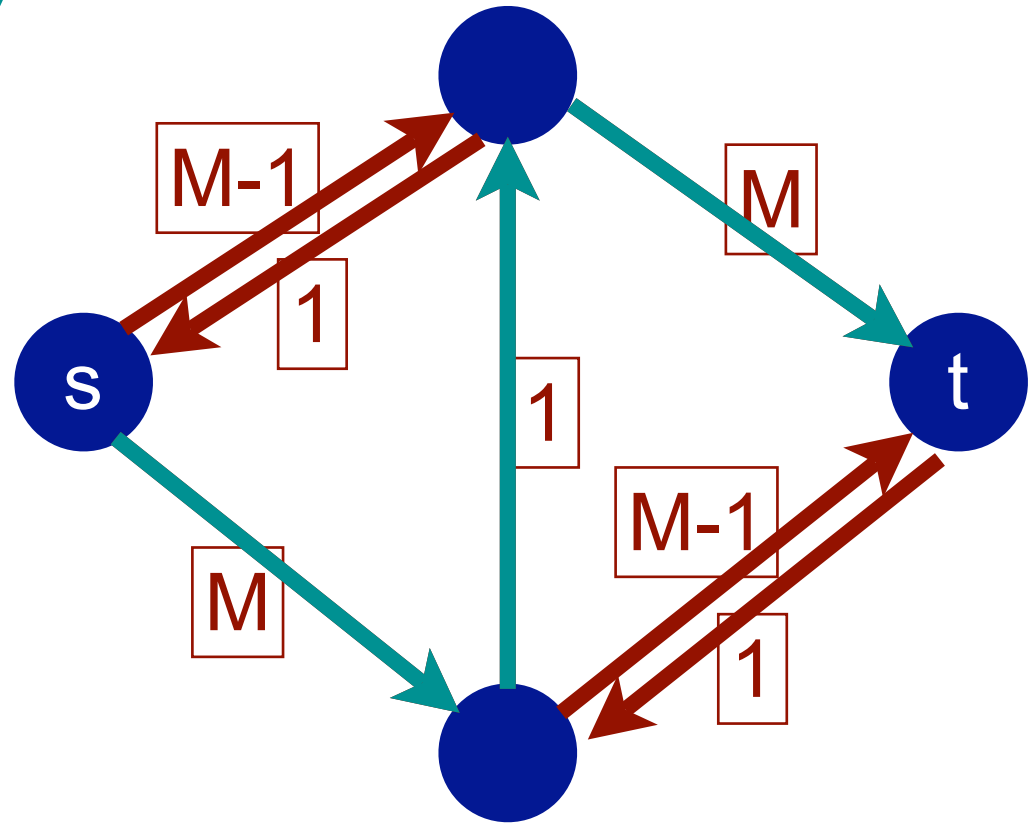
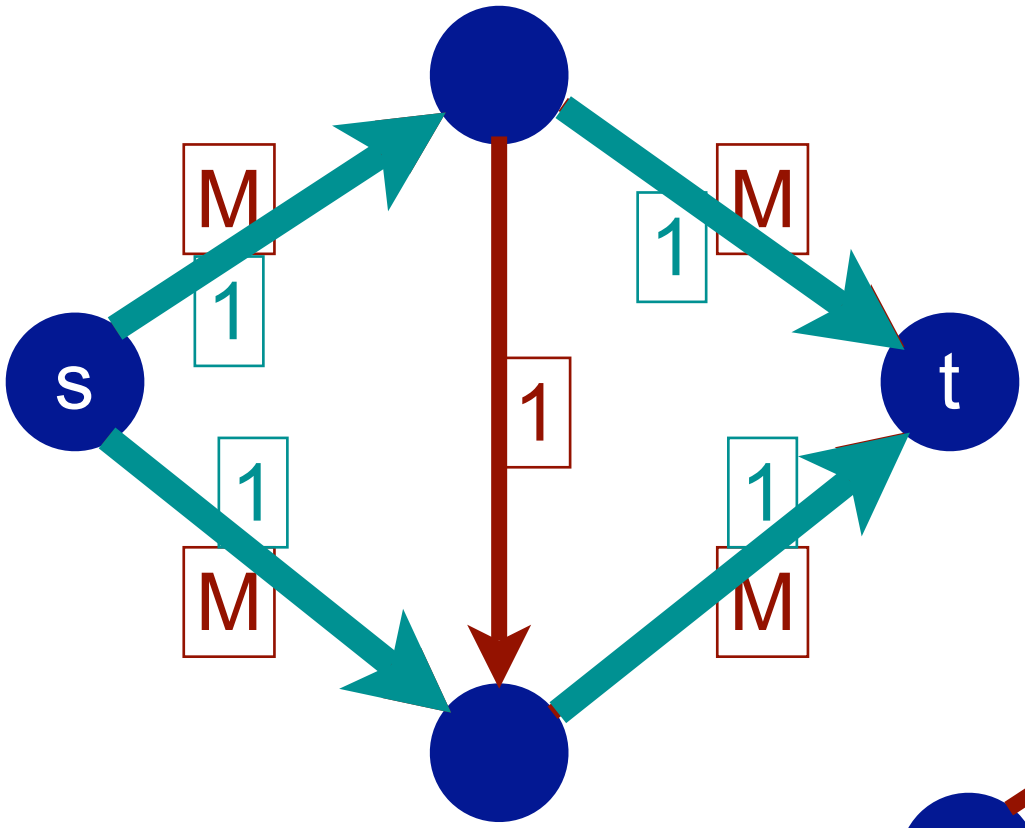


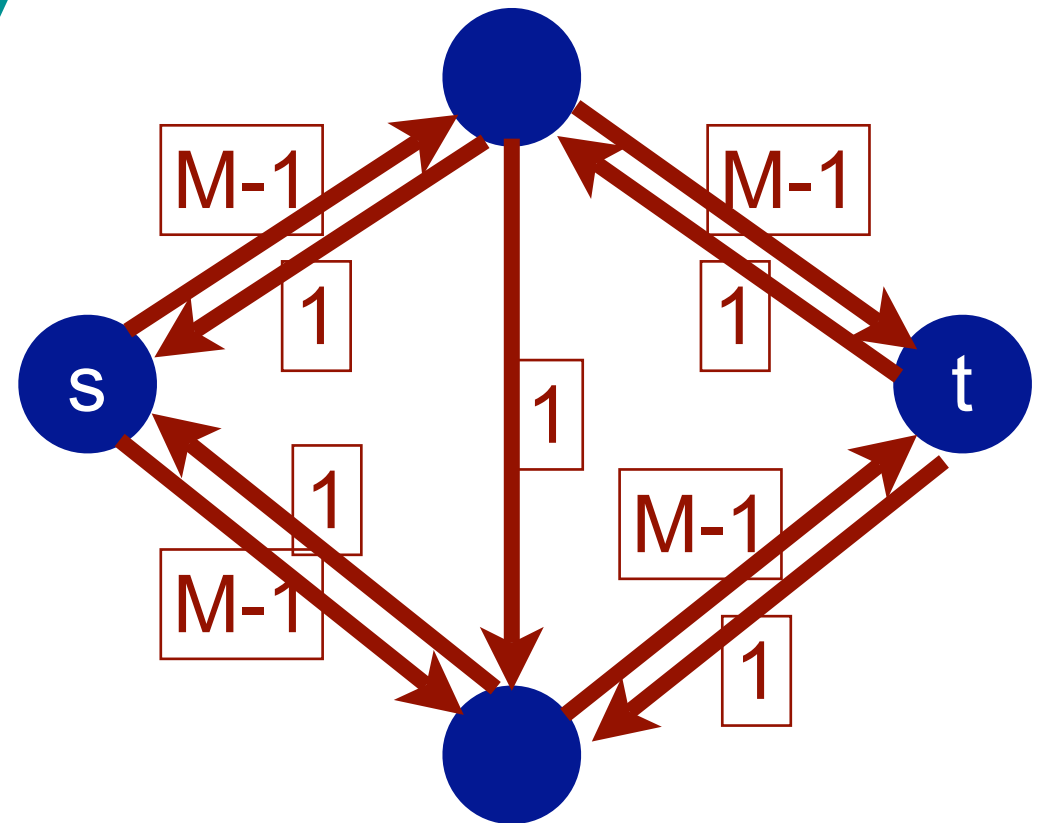
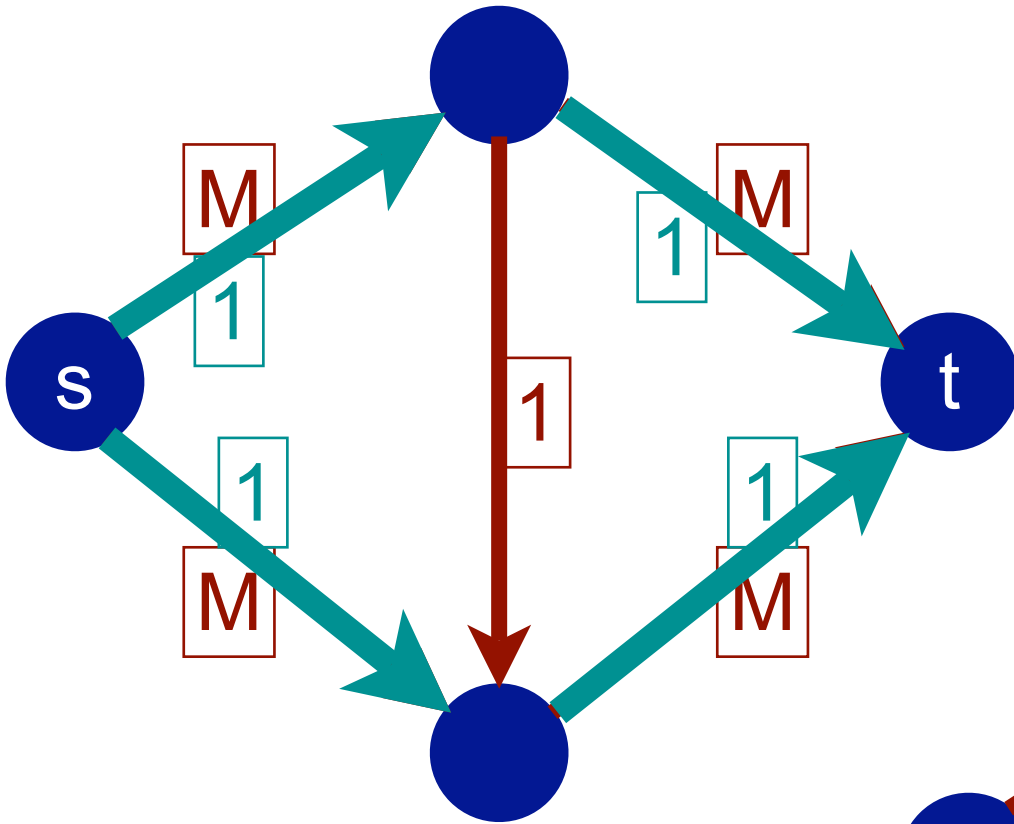












שיטת הסילום (scaling)

רעיון: בכל איטרציה נמצא מסלול משפר ρ שקיבולו מירבי.

סילום: נחזיק חסם Δ ונמצא מסלול משפר שקיבולו לפחות Δ . אם אין כזה, נקטין את Δ בפקטור של 2.

ערך התחלתי: נקבע את Δ להיות החזקה הגדולה ביותר של 2 שאינה גדולה מהקיבול המירבי של קשת שיוצאת מ- s .

עבור ערך התחלתי זה, $|f^*| < |E| \cdot 2\Delta$.

Scaling_Ford-Fulkerson(G, c, s, t)

$f \leftarrow \vec{0}$

$\Delta \leftarrow \max 2^j \leq \max_{(s,v) \in E} c(s,v)$

while $\Delta \geq 1$ do

 while \exists augmenting path $p \in G_f(\Delta)$ do

$g \leftarrow \vec{0}$

 for each $e \in p$ do $g(e) \leftarrow c_f(p)$

$f \leftarrow f + g$

 end while

$\Delta \leftarrow \Delta / 2$

end while

return f

זו הרשת השיורית שממנה הסרנו
את כל הקשתות שקיבולן $> \Delta$.

למה: בתחילת כל איטרציה של לולאת ה-while החיצונית מתקיים $|f^*| < |f| + 2\Delta \cdot |E|$.

הוכחה: נסמן ב-S את קבוצת הצמתים שיש מסלול מ-s אליהם ב- $G_f(2\Delta)$ (עבור f בתחילת האיטרציה הנדונה). לפי הגדרת האלגוריתם, $t \notin S$ (אחרת לא היינו מעדכנים את Δ). לכן $(S, V \setminus S)$ הוא חתך.

לכל קשת $(x, y) \in S \times V \setminus S$ מתקיים:

$$c(x, y) < f(x, y) + 2\Delta$$

וכמו כן לכל קשת $(y, x) \in V \setminus S \times S$ מתקיים:

$$f(y, x) < 2\Delta$$

לכן:

$$\begin{aligned} |f^*| &\leq c(S, V \setminus S) < \sum_{(x, y) \in E \cap (S \times V \setminus S)} (f(x, y) + 2\Delta) \\ &= |f| + \sum_{(y, x) \in E \cap (V \setminus S \times S)} f(y, x) + \sum_{(x, y) \in E \cap (S \times V \setminus S)} 2\Delta \\ &< |f| + 2\Delta \cdot |E| \end{aligned}$$

סיבוכיות שיטת הסילום

מספר האיטרציות של הלולאה החיצונית הוא לכל היותר $\log C + 1$, באשר $C = \max_{(s,v) \in E} c(e)$.

באיטרציה עבור ערך Δ מספר האיטרציות של הלולאה הפנימית הוא לכל היותר $2 \cdot |E|$.

כל איטרציה עולה $O(|E|)$.
(אפשר להניח שגרף התשתית קשיר)

סה"כ: $O(|E|^2 \cdot \log C)$

זה אלגוריתם פולינומי, אבל מספר פעולות החשבון תלוי בגודל המספרים בקלט. אפשר לקוות שגודל המספרים ישפיע רק על הסיבוכיות של כל פעולת חשבון.

ניתוח הסיבוכיות של אלגוריתם Edmonds-Karp

משפט: מספר האיטרציות שמבצע אלגוריתם Edmonds-Karp הוא $O(|V| \cdot |E|)$.

הוכחה: נסמן כל איטרציה על ידי הזרימה בדיוק לפני שהיא מתבצעת. תהי f איטרציה כלשהי, ותהי g האיטרציה הבאה אחריה. נראה תחילה שלכל צומת $v \in V \setminus \{s, t\}$ מתקיים $d_f(s, v) \leq d_g(s, v)$.

כדי להוכיח זאת, נשים לב שאם $(x, y) \in E_g$ אזי מתקיים כי $(x, y) \in E_f$ או $(y, x) \in E_f$ - ו- $d_f(s, x) = d_f(s, y) + 1$.
בכל מקרה, $d_f(s, y) \leq d_f(s, x) + 1$. אם קיים צומת $v \neq s$ עבורו $d_g(s, v) < d_f(s, v)$, נבחר v כזה קרוב ביותר ל- s .
תהי (u, v) קשת אחרונה במסלול קצר ביותר מ- s ל- v ב- G_g . נקבל סתירה לבחירה של v כי:
 $\therefore d_g(s, u) = d_g(s, v) - 1 < d_f(s, v) - 1 \leq d_f(s, u)$

בעזרת BFS נמצא בכל איטרציה מסלול משפר קצר ביותר.

סימון: לכל זוג צמתים $x, y \in V$, נסמן ב- $d_f(x, y)$ את האורך (מספר הקשתות) של מסלול קצר ביותר מ- x ל- y ב- G_f .

הגדרה: קשת e נקראת צוואר בקבוק עבור איטרציה מסויימת של האלגוריתם (שבתחילה הזרימה היא f) אם היא נמצאת על המסלול המשפר p של אותה איטרציה, ו- $c_f(e) = c_f(p)$.

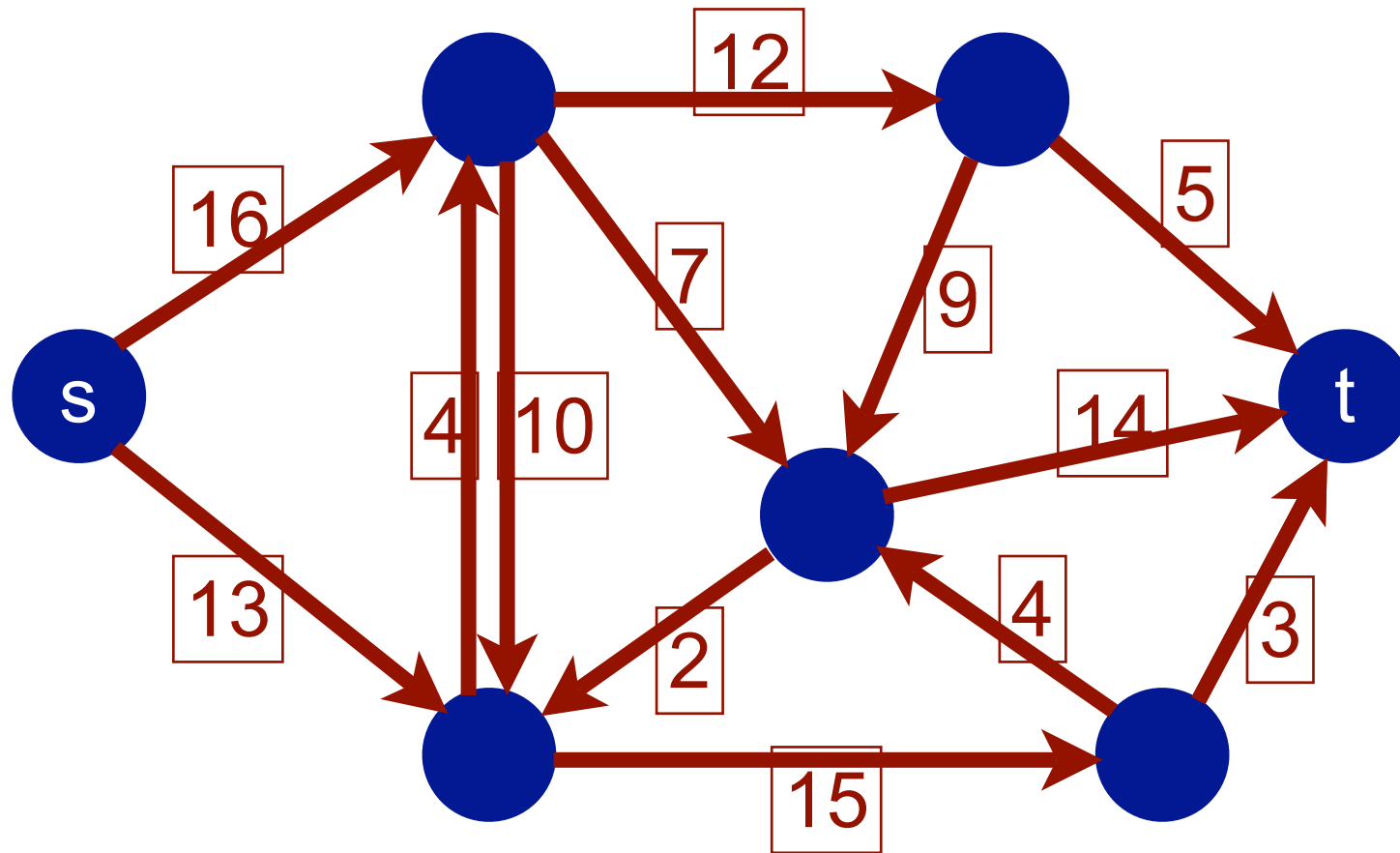
בכל איטרציה יש לפחות צוואר בקבוק אחד, כך שנחסום את מספר האיטרציות על ידי חסימת מספר הפעמים שקשת יכולה להיות צוואר בקבוק.

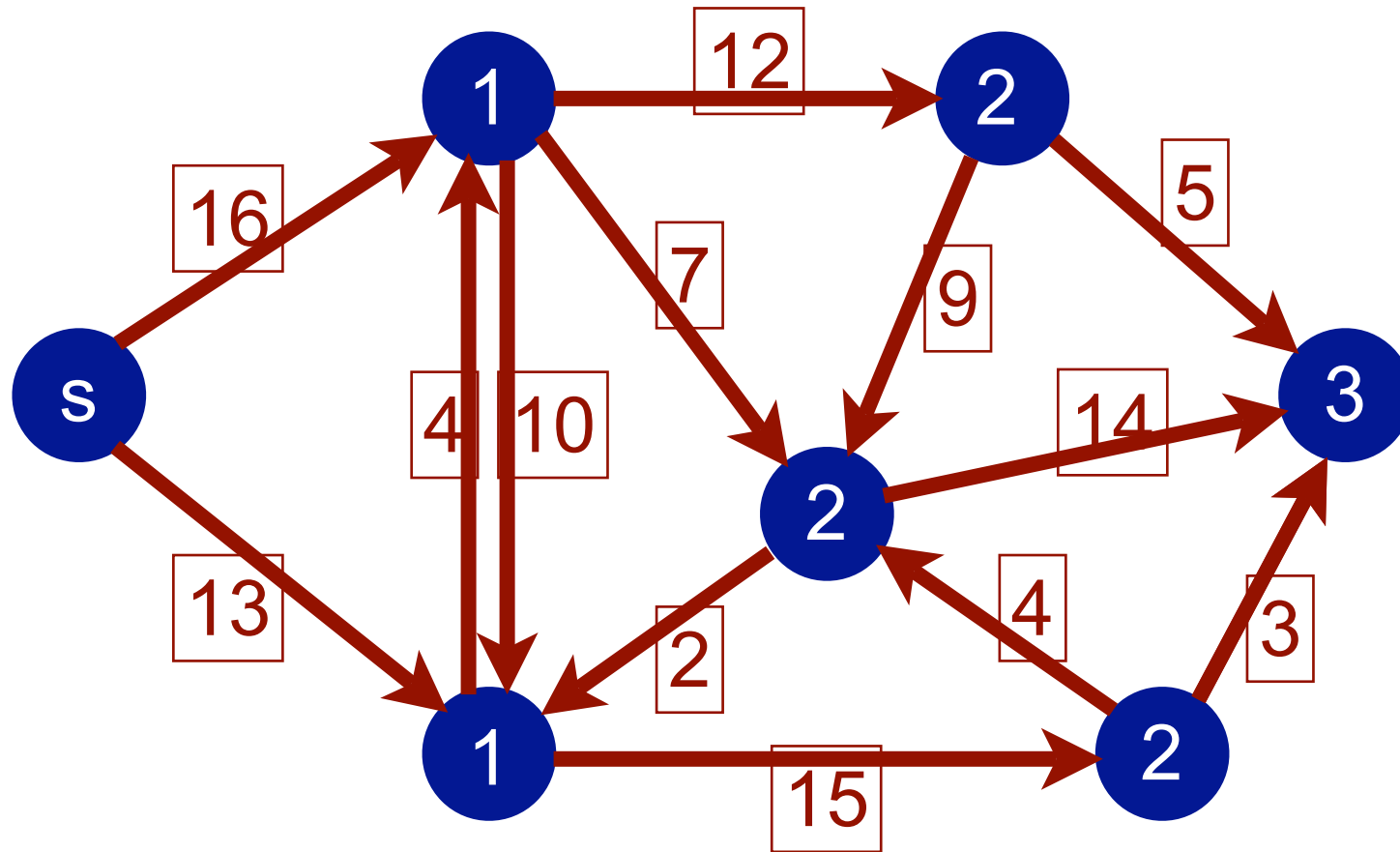
תהי (u,v) קשת כלשהי, תהי f איטרציה שבה קשת זו היא צוואר בקבוק, ותהי h האיטרציה הבאה שבה קשת זו היא צוואר בקבוק.

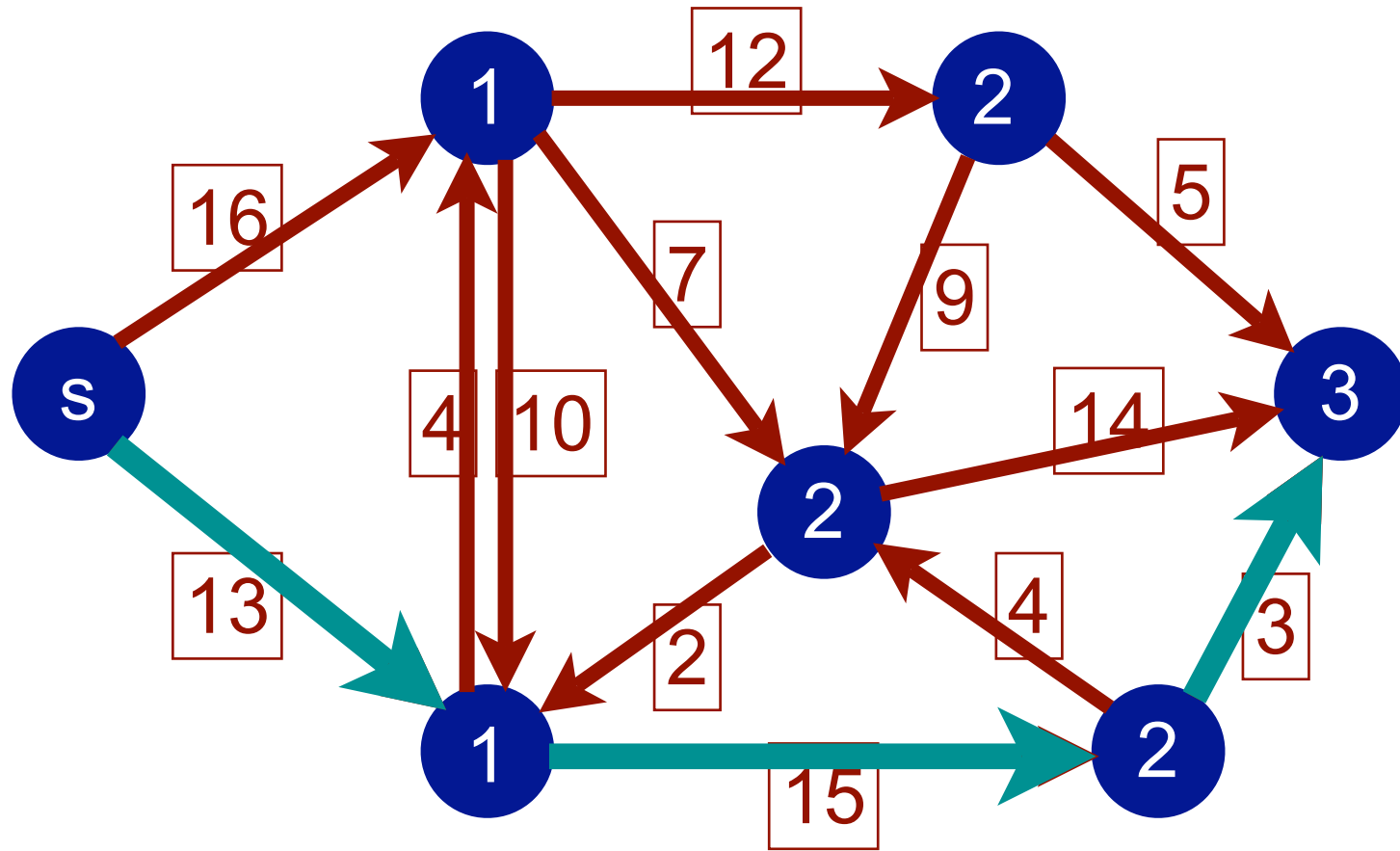
אחרי השיפור באיטרציה f הקשת (u,v) נעלמה מהרשת השירית, ועל מנת שתופיע שוב באיטרציה h צריכה להיות איטרציה g בין f ל- h שבה המסלול המשפר עבר על הקשת ההפוכה (v,u) . אבל אז:

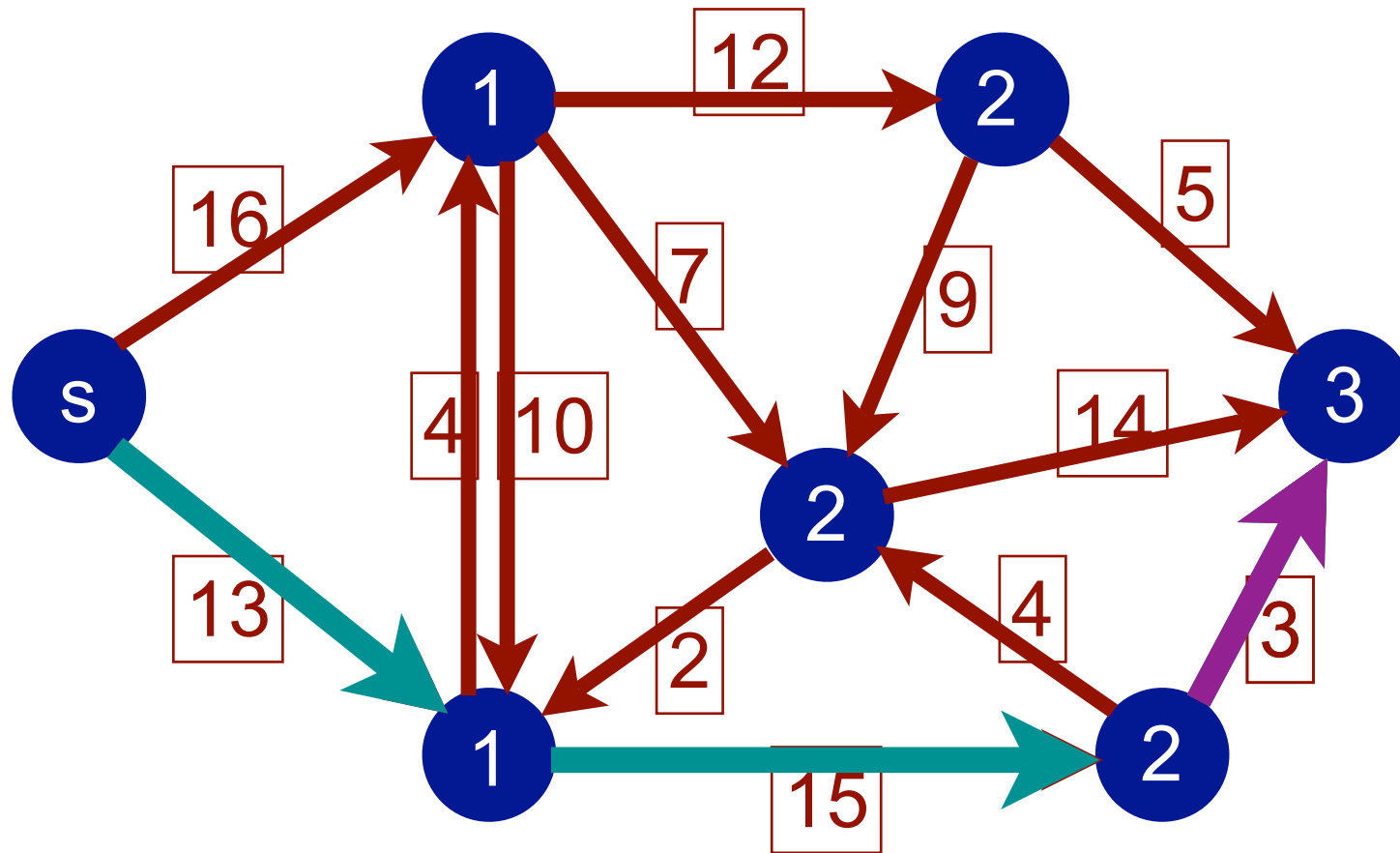
$$d_h(s,u) \geq d_g(s,u) = d_g(s,v) + 1 \geq d_f(s,v) + 1 = d_f(s,u) + 2$$

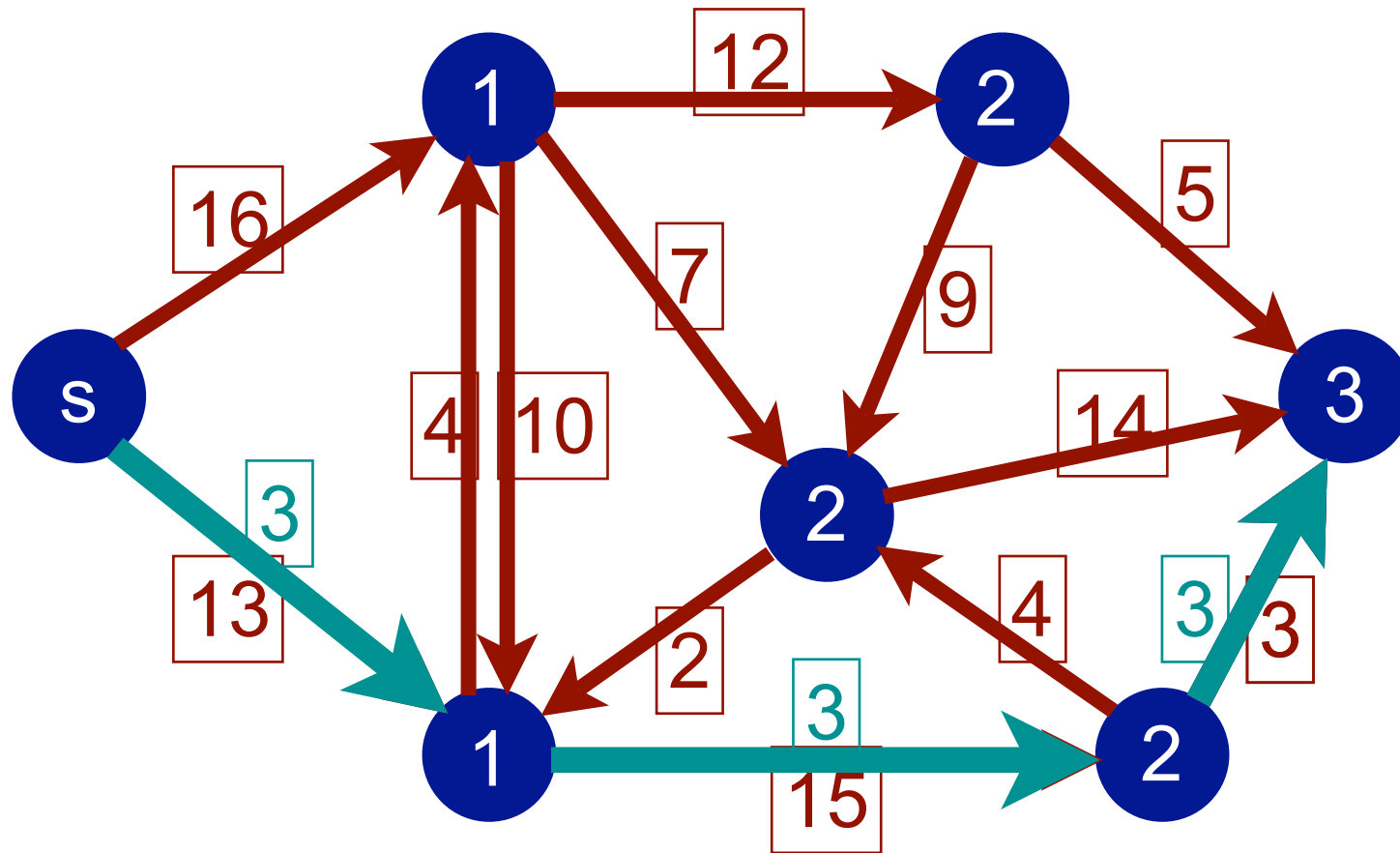
כלומר, בין שתי איטרציות שבהן (u,v) צוואר בקבוק, המרחק של u מ- s גדל לפחות ב-2. המרחק הזה הוא לפחות 0 ולכל היותר $|V|-2$, ולכן מספר הפעמים ש- (u,v) צוואר בקבוק הוא $\geq |V| / 2$.
∴



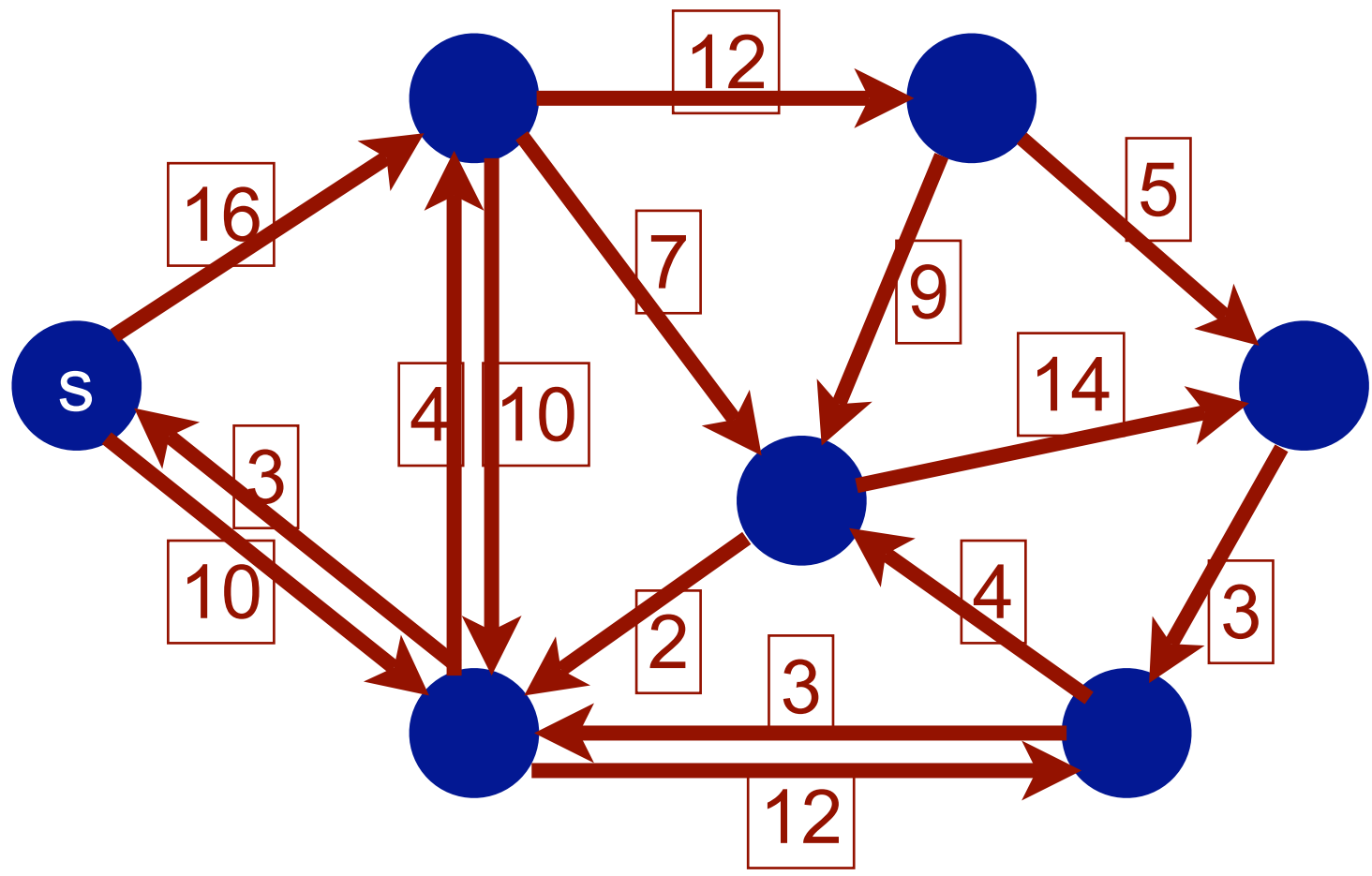




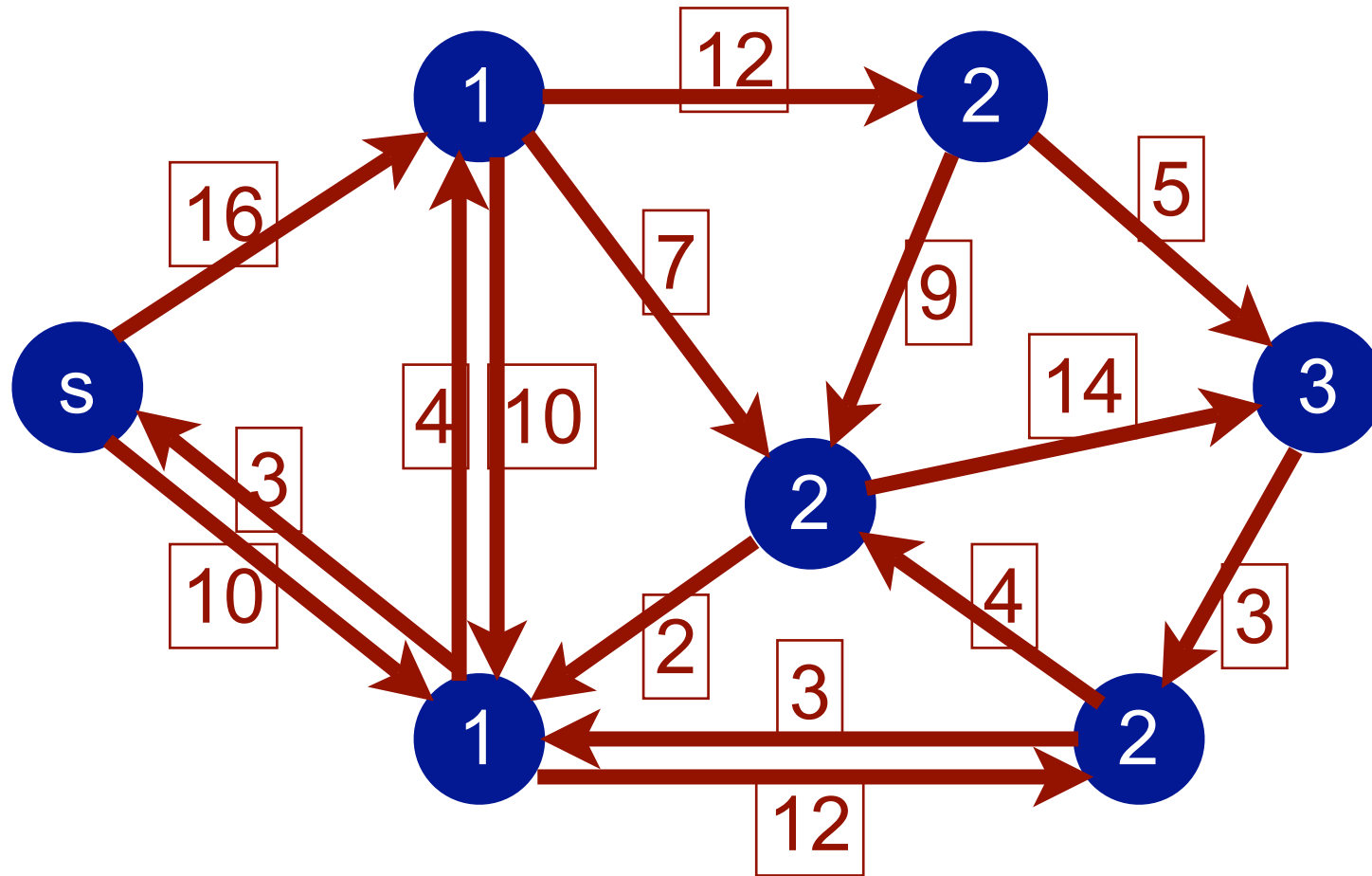




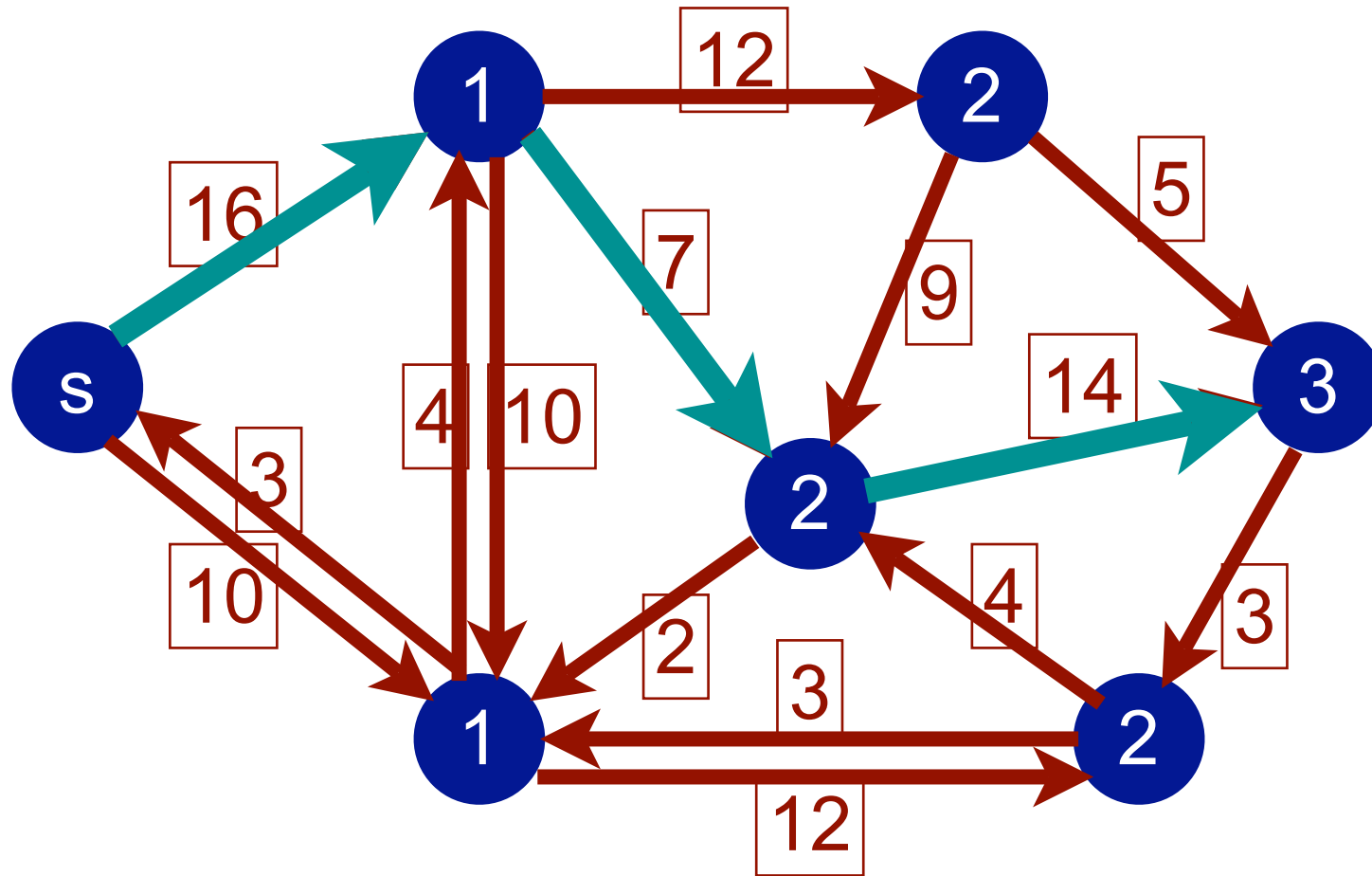
הרשת השיורית



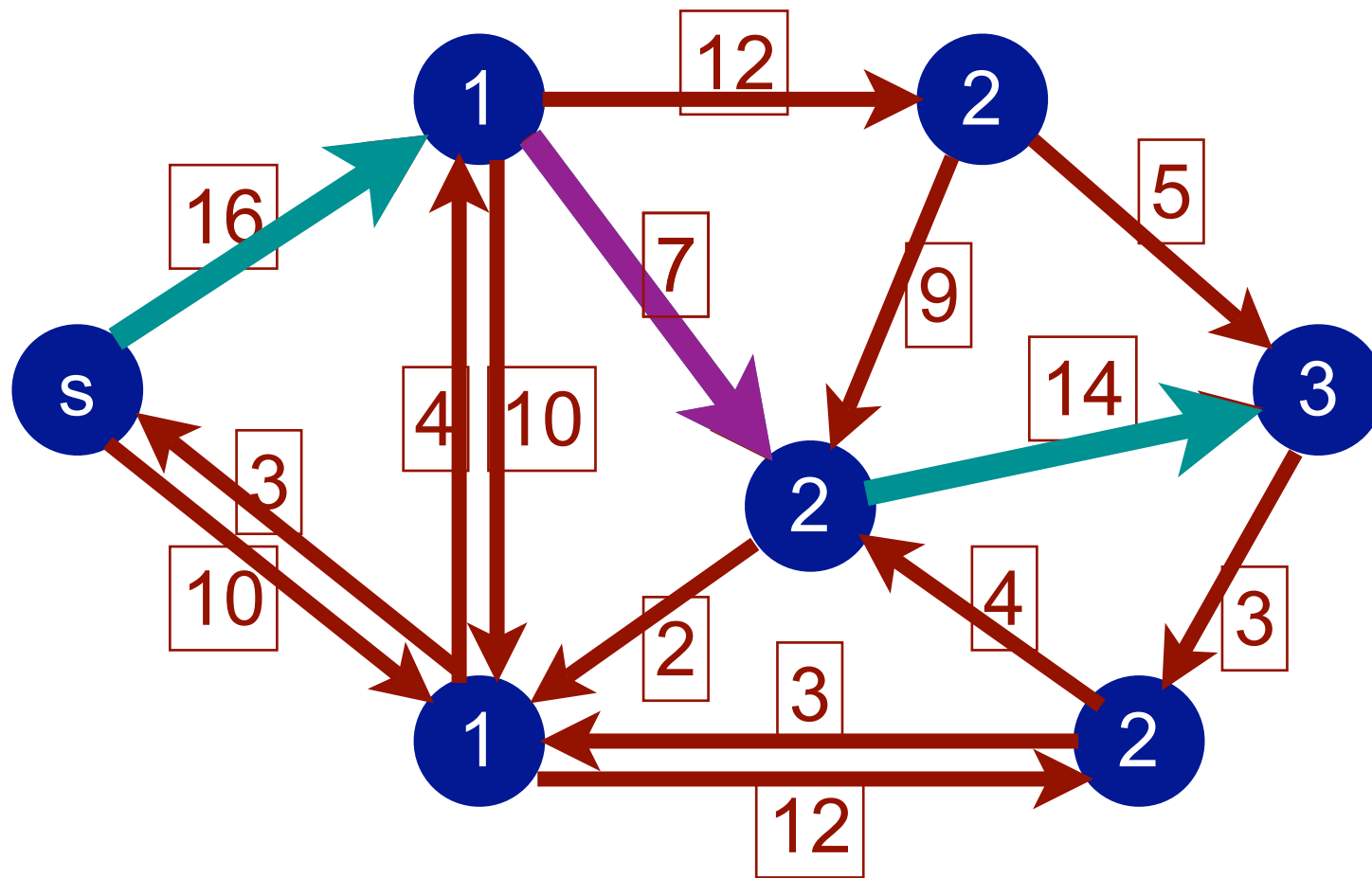
הרשת השיורית



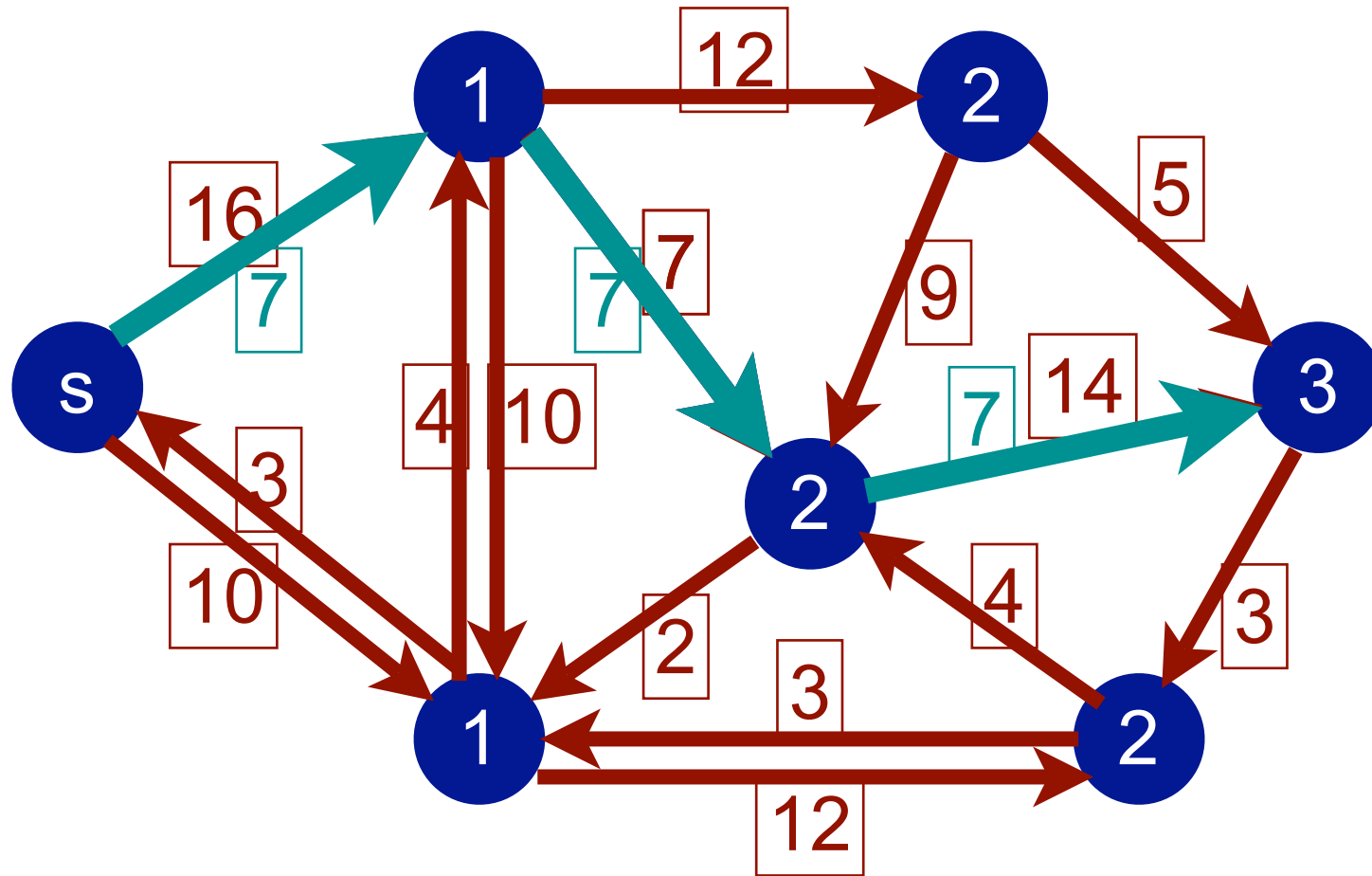
הרשת השיורית



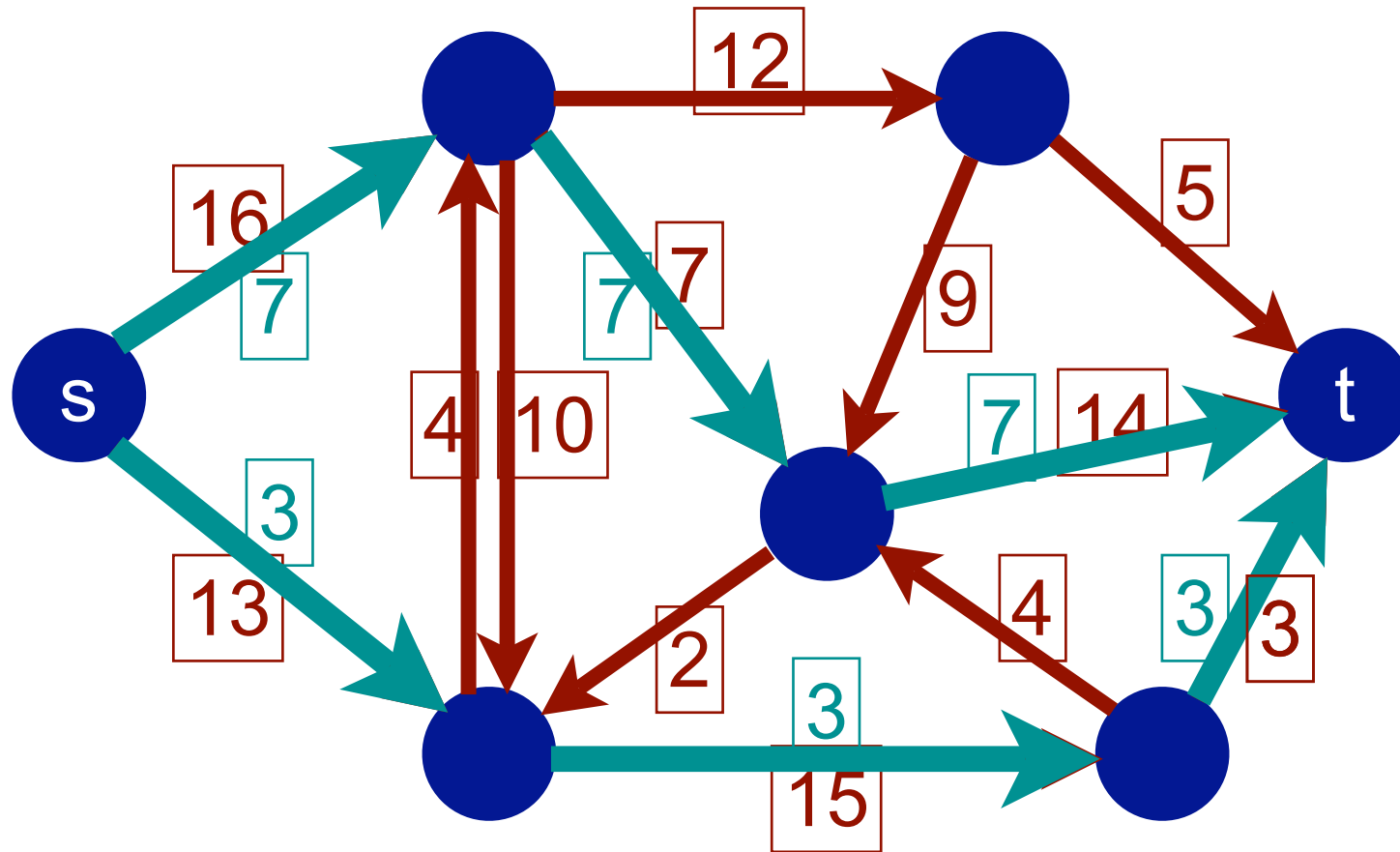
הרשת השיורית



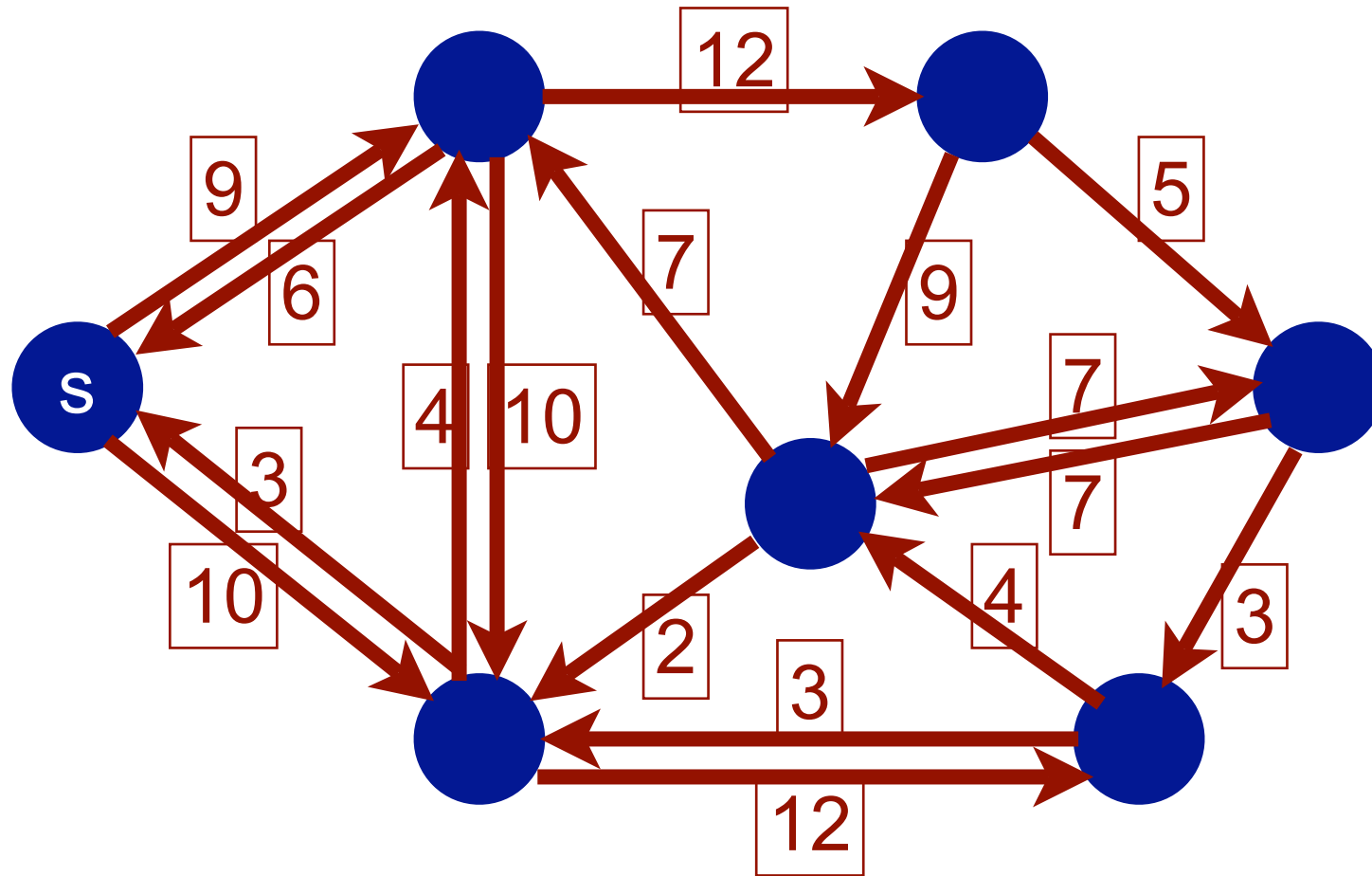
הרשת השיורית



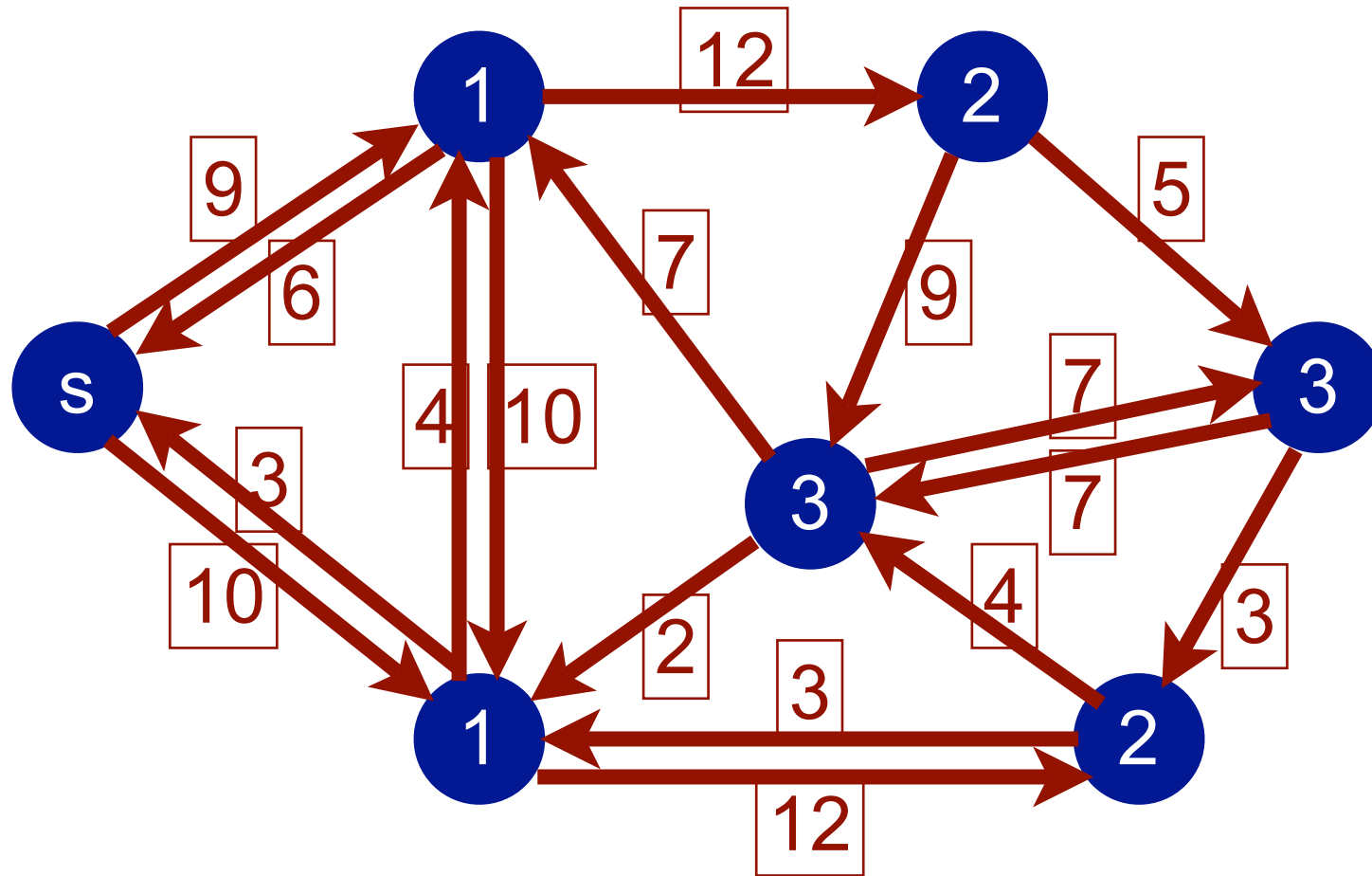
הזרימה עד כה



הרשת השיורית



הרשת השיורית



סיבוכיות Edmonds-Karp

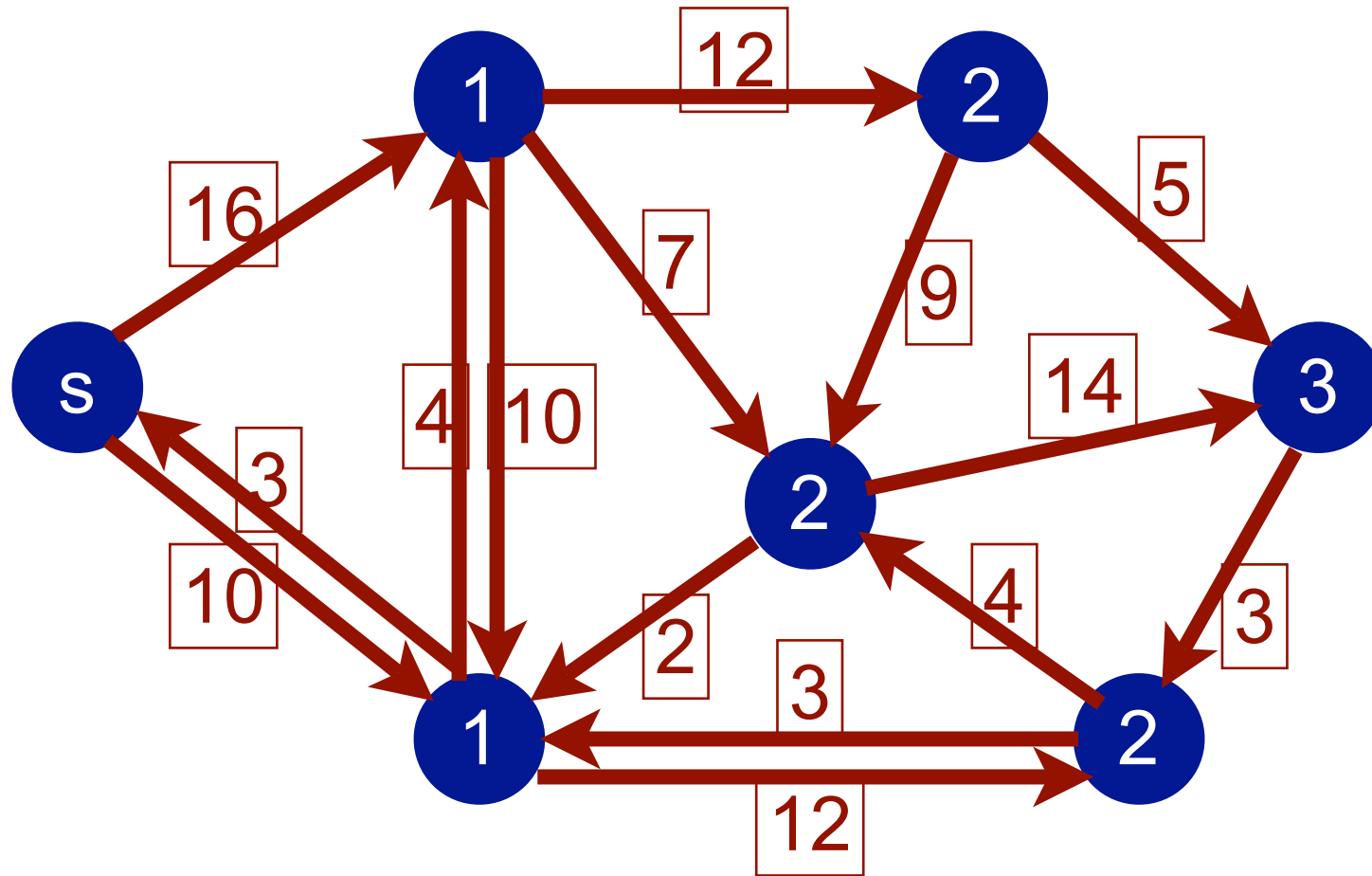
מספר האיטרציות: $O(|V| \cdot |E|)$.
כל איטרציה עולה $O(|E|)$ זמן.

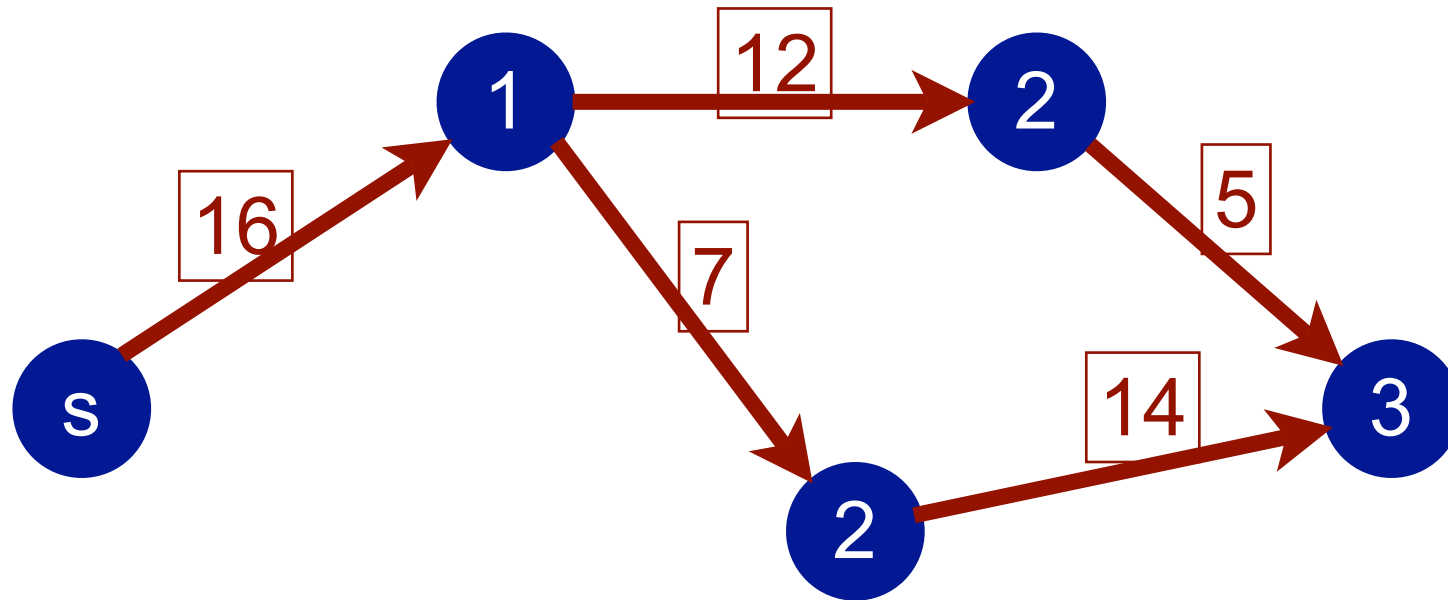
סה"כ: $O(|V| \cdot |E|^2)$

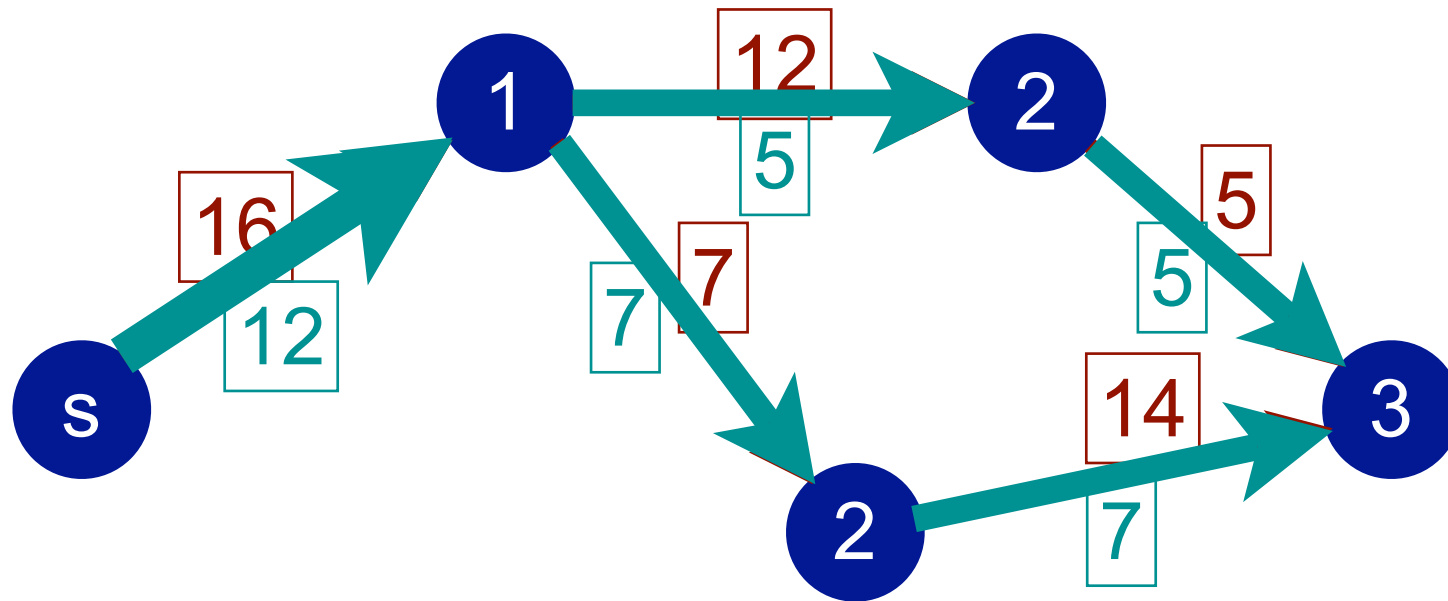
הגדרה: זרימה f ברשת G, c, s, t נקראת זרימה חוסמת אם כל מסלול מ- s ל- t כולל לפחות קשת אחת עברה ערך הזרימה שווה לקיבול.

הגדרה: עבור רשת זרימה G, c, s, t תת-הרשת $L(G), c, s, t$ שמתקבלת מ- G, c, s, t על ידי הסרת כל הקשתות שאינן נמצאות על מסלול קצר ביותר מ- s ל- t נקראת רשת השכבות של G, c, s, t .

הרעיון: בכל איטרציה נמצא זרימה חוסמת g ברשת השכבות $L(G_f), c_f, s, t$ ונעדכן $f \leftarrow f + g$.







משפט: מספר הפעמים שהאלגוריתם של Dinic צריך למצוא זרימה חוסמת הוא לכל היותר $|V| - 1$.

הוכחה: תהי f הזרימה בשלב כלשהו של ריצת

האלגוריתם, ותהי g זרימה חוסמת כלשהי ב- $L(G_f)$, באופן דומה לניתוח של אלגוריתם Edmonds-Karp, מתקיים גם כאן כי $d_{f+g}(s,v) \geq d_f(s,v)$ לכל צומת v . נניח שמתקיים $d_{f+g}(s,t) = d_f(s,t)$. יהי p מסלול קצר ביותר מ- s ל- t ב- G_{f+g} . נניח שיש קשת $(x,y) \in p$ שלא נמצאת ב- G_f . אם יש כמה קשתות כאלה, ניקח את זו האחרונה ב- p . אזי (y,x) קשת על מסלול קצר ביותר מ- s ל- t ב- G_f , אחרת $(x,y) \notin E_{f+g}$. נקבל סתירה כי:

$$d_f(s,t) = d_f(s,y) + d_f(y,t) = d_f(s,x) - 1 + d_f(y,t) < d_{f+g}(s,x) + 1 + d_{f+g}(y,t) = d_{f+g}(s,t)$$

לכן p הוא מסלול ב- $L(G_f)$, אבל זו סתירה לכך ש- g חוסמת. כלומר, חייב להיות כי $d_{f+g}(s,t) > d_f(s,t)$. אבל המרחק ל- t יכול לגדול לכל היותר $|V| - 1$ פעמים. \therefore

- נריץ BFS על הרשת השיורית
- נוריד כל קשת (x, y) עבורה $level[y] \neq level[x] + 1$.
- נוריד כל צומת x עבורו $level[x] \geq level[t]$.
- נעבור על השכבות מהסוף להתחלה ונוריד כל צומת x שלא נותרו לו קשתות יוצאות.

סיבוכיות: $O(|V| + |E|)$

חישוב זרימה חוסמת

- נמצא מסלול p מ- s ל- t ב- $L(G_f)$ על ידי אלגוריתם חמדן.
- נוסיף ל- g זרימה של $c_f(p)$ על גבי p .
- נוריד מ- $L(G_f)$ את כל הקשתות הרוויות ב- p .
- נעבור על השכבות לפי הסדר ונוריד כל צומת שלא נותרו לו קשתות נכנסות (למעט s).
- נעבור על השכבות בסדר הפוך ונוריד כל צומת שלא נותרו לו קשתות יוצאות (למעט t).

סיבוכיות: מורידים כל קשת לכל היותר פעם אחת.
למעט הורדת קשתות, טיפול במסלול עולה $O(|V|)$. כל מסלול גורם להורדת קשת אחת לפחות. סה"כ סיבוכיות הזמן היא: $O(|V| \cdot |E|)$.

סיבוכיות האלגוריתם של Dinic

אתחול: $O(|E|)$

מספר איטרציות שיפור הזרימה: $|V| - 1$

חישוב הרשת השירית: $O(|E|)$

חישוב רשת השכבות: $O(|E|)$

מציאת זרימה חוסמת: $O(|V| \cdot |E|)$

סה"כ: $O(|V|^2 \cdot |E|)$