תכנות דינמי

פרק 6, סעיפים 1-6, ב-Kleinberg/Tardos

סכום חלקי
מרחק עריכה

הרעיון: במקום להרחיב פתרון חלקי יחיד בכל צעד, נרחיב כמה פתרונות אפשריים וניקח בסוף את הטוב ביותר.

סכום חלקי (subset sum)

הקלט: סדרה של n מספרים טבעיים $a_1,a_2,\dots,a_n$
וטבעי W.

הפלט: תת-סדרה I עבורה $\sum_{i\in I} a_i \le W$
והסכום מקסימלי תחת האילוץ הזה.

תרגיל בית: הראו שהאלגוריתמים החמדנים הבאים נכשלים.
1. נוסיף ל-I איברים לפי הסדר כל עוד סכומם לא עולה על W.
2. נמיין את הסדרה בסדר לא יורד ואז נפעיל את האלגוריתם ב-1.

תכנות דינמי

- נחזיק טבלה OPT בגודל $n+1$ על $W+1$.
- הערך $OPT(i,w)$ הוא תת-סדרה של האיברים $a_1,a_2,\ldots,a_i$ שסכומם $\leq w$ והסכום מקסימלי תחת אילוץ זה.
- ערכי התחלה: $OPT(0,w) = OPT(i,0) = \varepsilon$.
- עדכון: $OPT(i,w)$ הוא הטוב מבין שתי אפשרויות.
אפשרות אחת: $OPT(i-1,w)$.
אפשרות שנייה: i , $OPT(i-1,w-a_i)$.

האלגוריתם

אתחול

```
Subset_Sum(a,n,W)
  for w ← 0 to W do OPT(0,w) ← ε; S(0,w) ← 0
  for i ← 0 to n do OPT(i,0) ← ε; S(i,0) ← 0
  for i ← 1 to n do
    for w ← 1 to W do
      if S(i-1,w) > S(i-1,w-a_i) + a_i then
        S(i,w) ← S(i-1,w)
        OPT(i,w) ← OPT(i-1,w)
      else
        S(i,w) ← S(i-1,w-a_i) + a_i
        OPT(i,w) ← OPT(i-1,w-a_i) , i
      end if
    end for
  end for
return OPT(n,W)
```

נחזיק טבלת עזר S שבה S(i,w) הוא סכום האיברים ב-OPT(i,w).

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i \ w	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ \ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i \ w	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0				
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0			
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0			
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0			
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2		
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2		
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2		
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0				

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0			

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0			

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0			

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2		

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2		

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
$W = 4$

i ↓ \ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2		

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י $\log W$ ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2	3	

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2	3	

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ \ w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2	3	

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא $O(nW)$.
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

דוגמת הרצה

הסדרה: 3,2,2
W = 4

i ↓ / w →	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	2	3	4

הערה: זמן הריצה והמקום הנדרש הוא O(nW).
זה לא פולינומי אם W מיוצג ע"י log W ביטים.

תרגיל בית

תארו אלגוריתם לחלוקת פסקה לשורות באורך L. הפסקה מורכבת ממילים באורכים שונים. סדרת האורכים נתונה כקלט. אסור לקטוע מילה בין שתי שורות. יש להשאיר רווח אחרי כל מילה בשורה, למעט המילה האחרונה בשורה. מטרתכם היא למזער את הסכום על השורות של ריבוע ההפרש בין L לאורך שורת הטכסט.

מרחק עריכה

<u>הקלט</u>: שתי מחרוזות x ו-y מעל א"ב Σ.

<u>הפלט</u>: המספר המזערי של פעולות עריכה (הוספת אות, מחיקת אות, החלפת אות באות אחרת) אשר דרושות על מנת להפוך את x ל-y.

דוגמאות

מילה שגויה: ה צ ת ע צ ו ת
מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

דנ"א של אדם: G T G C A A G T C C C A T
דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ט

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

דנ”א של אדם: G T G C A A G T C C C A T

דנ”א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ט ע

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

דנ"א של אדם: G T G C A A G T C C C A T

דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ט ע

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

דנ"א של אדם: G T ~~G~~ C A A G T C C C A T

דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ע ט

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

G

דנ"א של אדם: G T ~~G~~ C A A G T C C C A T

דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ע ט

מילה שגויה: ה צ ת ע צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

G G

דנ"א של אדם: G T G C A A G T C C C A T

דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ט ע

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

G G

דנ”א של אדם: G T ~~G~~ C A A G ~~T~~ C ~~C~~ C A T

דנ”א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

דוגמאות

ע ט

מילה שגויה: ה צ ת ~~ע~~ צ ו ת

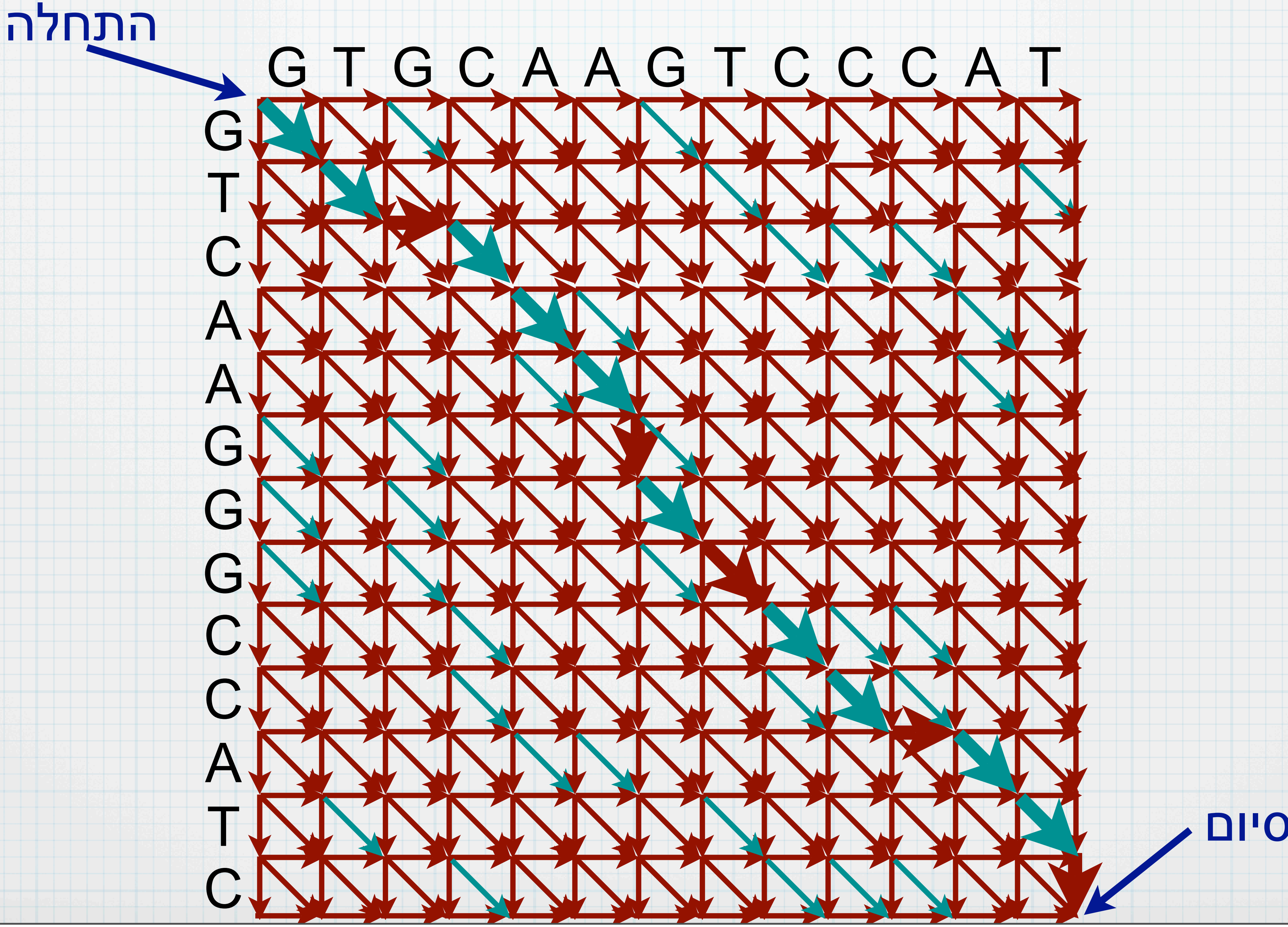
מילה מתוקנת: ה צ ט ע צ ע ו ת

G G C

דנ"א של אדם: G T ~~G~~ C A A G ~~T~~ C ~~C~~ C A T

דנ"א של שימפנזה: G T C A A G G G C C A T C

הצגה בעזרת גרף



הצגה בעזרת גרף (המשך)

$|x| = m, |y| = n$

$G = (V,E)$

$V = \{0,1,2,...,m\} \times \{0,1,2,...,n\}$

$$E = \{((i,j),(i+1,j)): 0 \leq i < m \wedge 0 \leq j \leq n\} \cup$$ מחיקות

$$\{((i,j),(i,j+1)): 0 \leq i \leq m \wedge 0 \leq j < n\} \cup$$ הוספות

$$\{((i,j),(i+1,j+1)): 0 \leq i < m \wedge 0 \leq j < n\}$$ החלפות

$$w((i,j),(i+1,j)) = w((i,j),(i,j+1)) = 1$$

$$w((i,j),(i+1,j+1)) = [x_{i+1} \neq y_{j+1}]$$ ← אינדיקטור לתנאי

מסלול מכוון מ-(0,0) ל-(m,n) מתאים לסדרת פעולות עריכה שממירות את x ל-y. נחפש מסלול עם משקל מינימלי.

האלגוריתם

נחזיק טבלה D. הערך שנחשב ב-D(i,j) הוא המשקל המינימלי של מסלול מ-(0,0) ל-(i,j).

Edit_Distance(x.m,y,n)
  for $i \leftarrow 0$ to m do $D(i,0) \leftarrow i$
  for $j \leftarrow 1$ to n do $D(0,j) \leftarrow j$
  for $i \leftarrow 1$ to m do
    for $j \leftarrow 1$ to n do
      $D(i,j) = \min\{D(i-1,j)+1, D(i,j-1)+1, D(i-1,j-1)+[x_i \neq y_j]\}$
    end for
  end for
return D(m,n)

סיבוכיות: זמן O(mn), מקום O(mn).

הוכחת נכונות

נוכיח באינדוקציה על סדר החישוב של איברי D שלכל i,j הערך D(i,j) הוא המשקל המינימלי של מסלול מ-(0,0) ל-(i,j).

בסיס האינדוקציה: האתחול מבטיח נכונות עבור הזוגות i,j שבהם $i = 0$ או $j = 0$.

צעד האינדוקציה: כל מסלול ל-(i,j) חייב לעבור דרך אחד הצמתים (i-1,j) או (i,j-1) או (i-1,j-1), ואז לשלם עבור הקשת הנוספת. הקטע עד הצומת הקודם חייב להיות מסלול במשקל מינימלי, אחרת אפשר להחליפו ולהוריד את המשקל הכולל. האלגוריתם בוחר במינימום בין שלוש האפשרויות. $\therefore$

הערה: במימוש, די לשמור 2 עמודות $\Leftarrow$ מקום O(m)

חישוב סדרת פעולות העריכה

נשמור טבלה נוספת P בגודל m+1 X n+1.

הערך P(i,j) יציין את הקשת האחרונה במסלול שמשקלו D(i,j) מ-(0,0) ל-(i,j).

$P(i,j) \in \{(i-1,j) , (i,j-1) , (i-1,j-1)\}$

הדפסת המסלול: נקרא ל-Edit_sequence(P; (m,n))

```
Edit_sequence(P; (i,j))
  if (i,j) ≠ (0,0) then
    Edit_sequence(P; P(i,j))
    if P(i,j) = (i-1,j) then write(delete x_i)
    else if P(i,j) = (i,j-1) then write(insert y_j)
    else if x_i ≠ y_j then write(substitute x_i by y_j)
  end if
return
```

הערה: קשה יותר להקטין את סיבוכיות המקום.