סריקה לעומק

פרק 3 ב-Kleinberg/Tardos
פרק 23.3-5 ב-Cormen et al

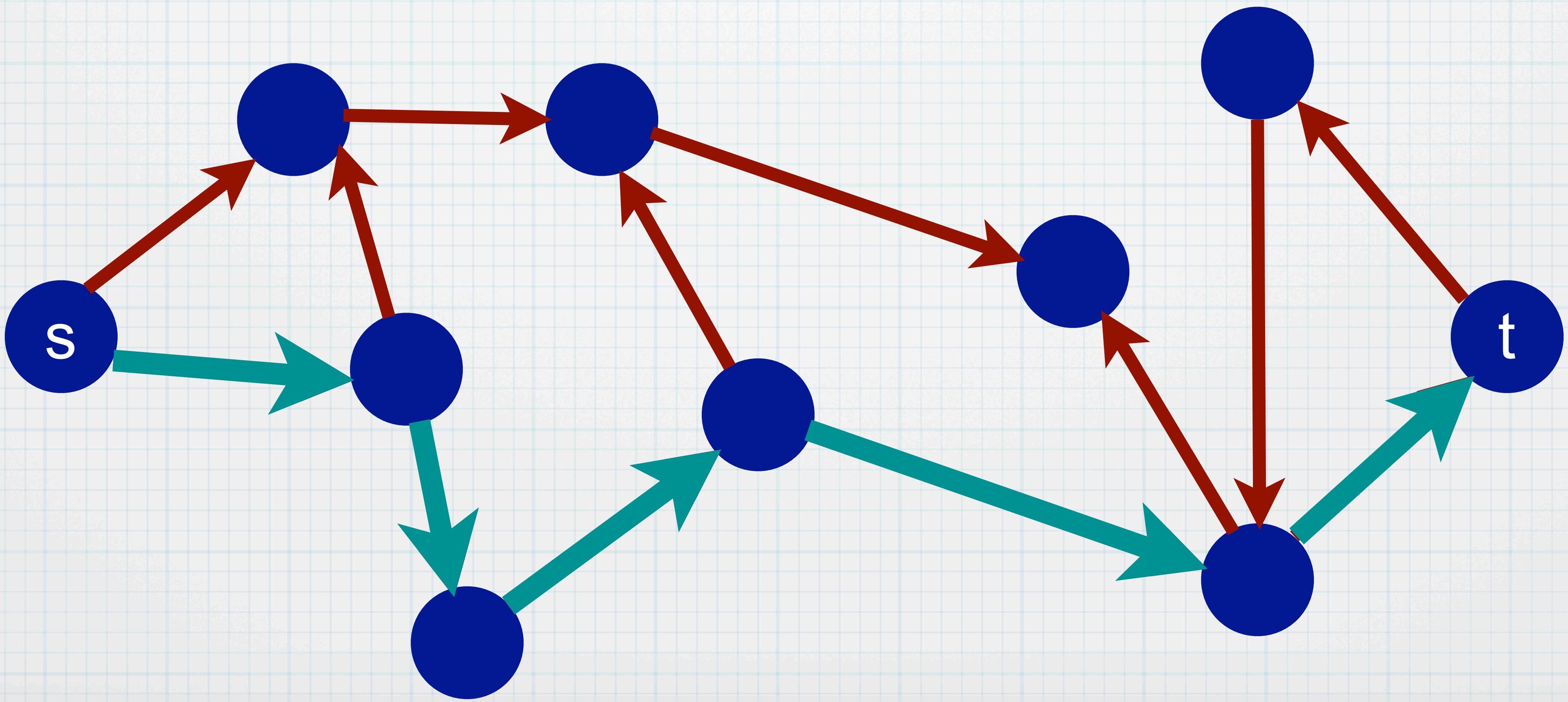
רכיבים אי-פריקים
רכיבים קשירים היטב
מיון טופולוגי

קשירות

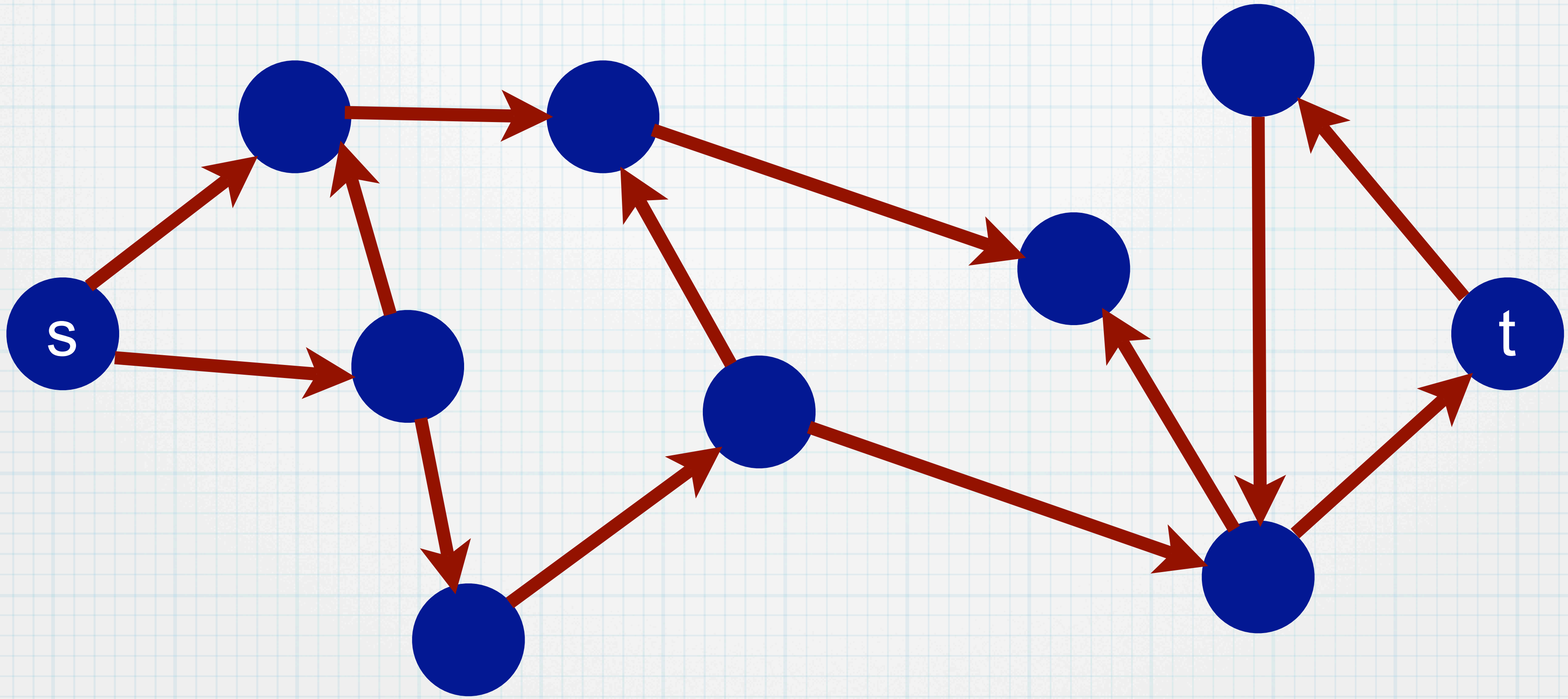
נעיין שוב בבעיית הקשירות:
האם יש מסלול מ-s ל-t?

קשירות

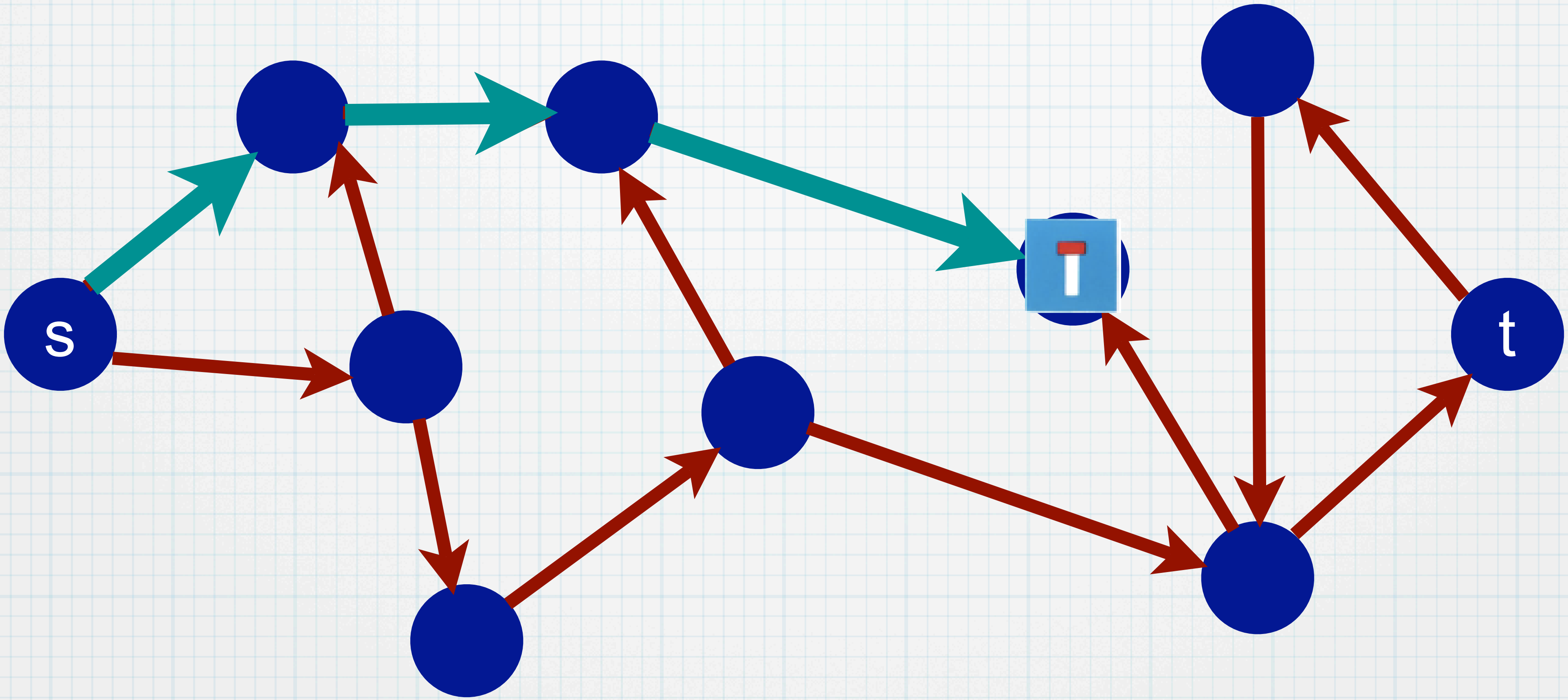
נעיין שוב בבעיית הקשירות:
האם יש מסלול מ-s ל-t?



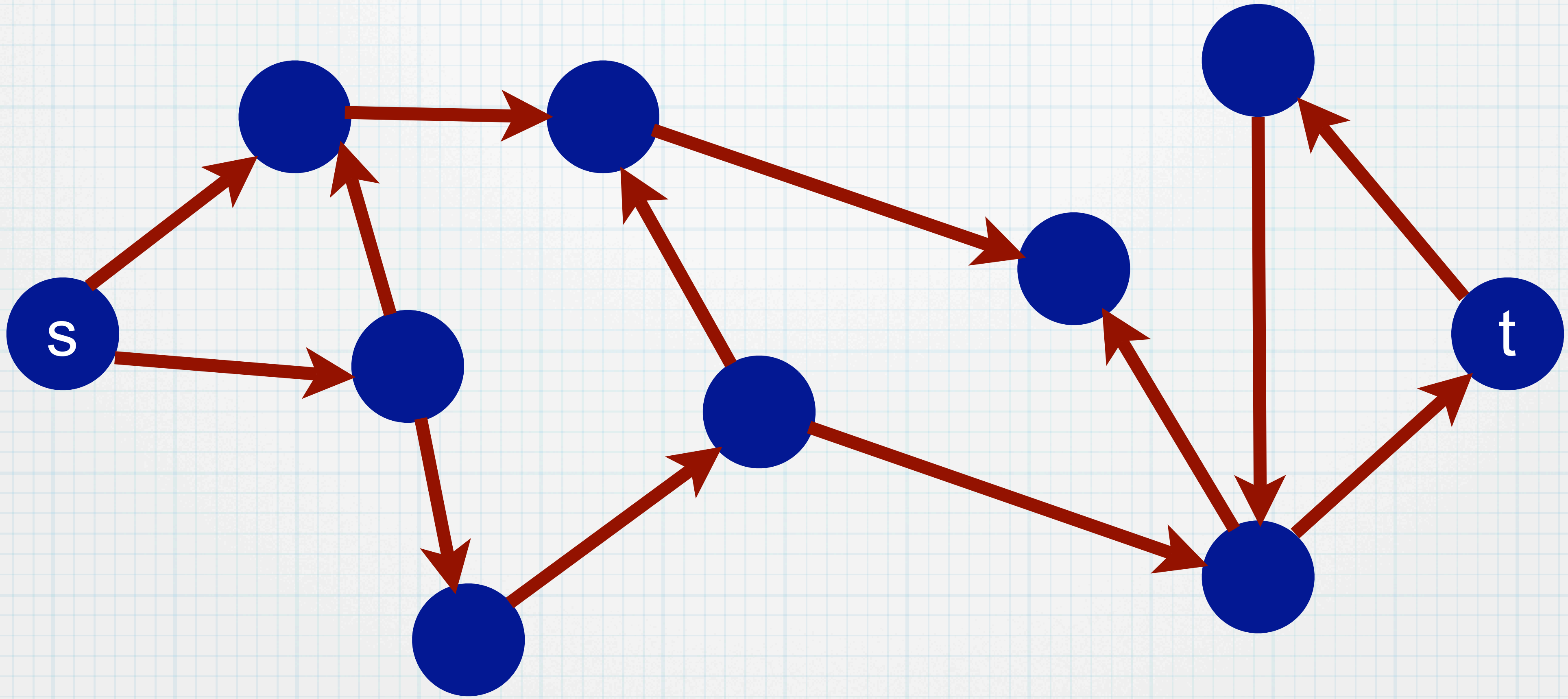
כשלון הגישה החמדנית



כשלון הגישה החמדנית

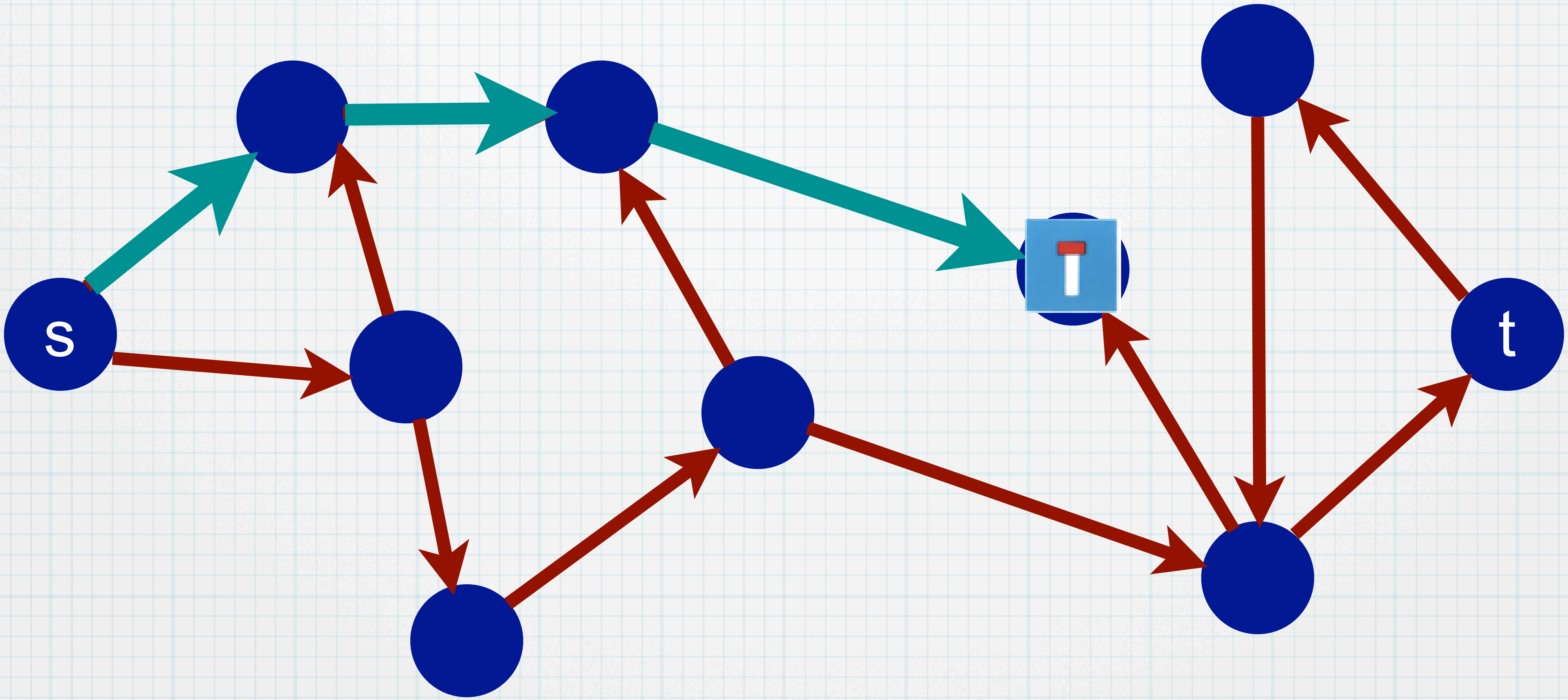


תיקון



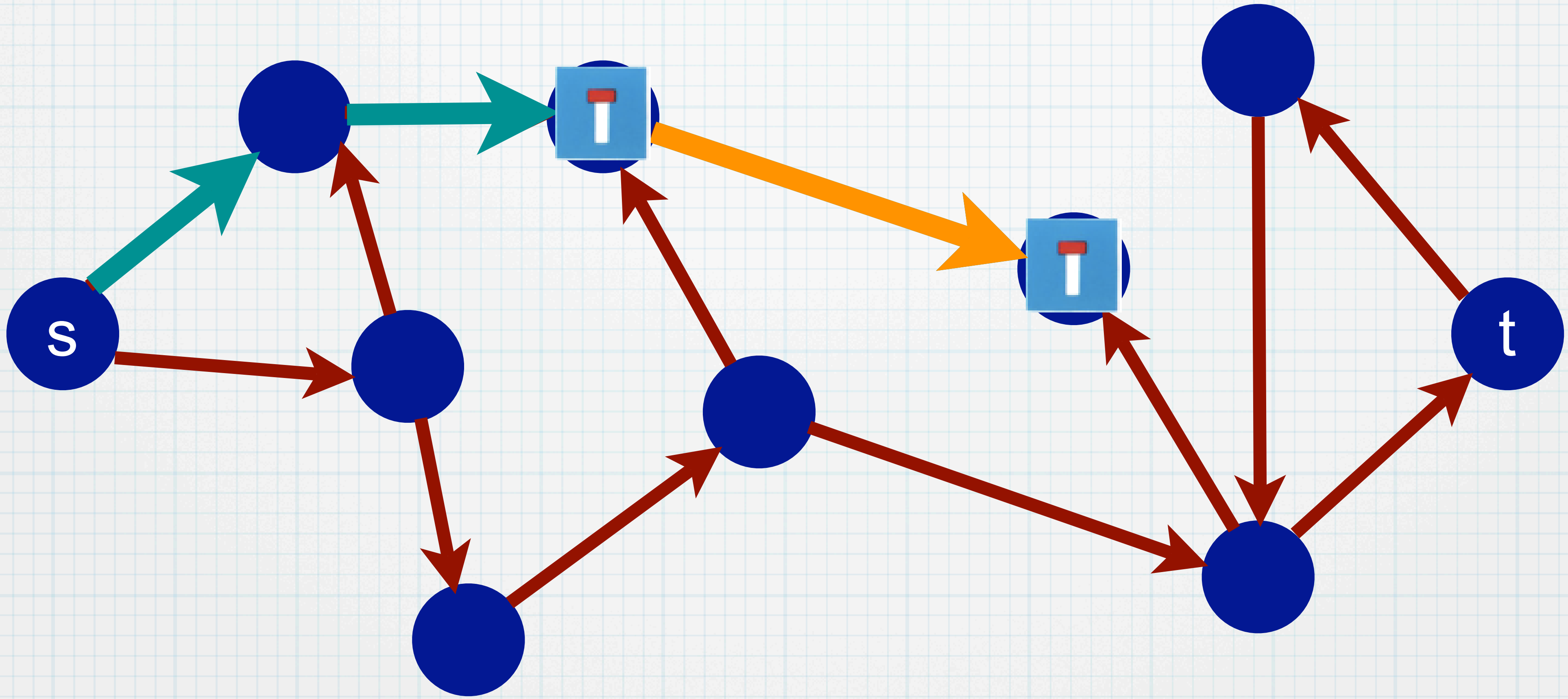
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



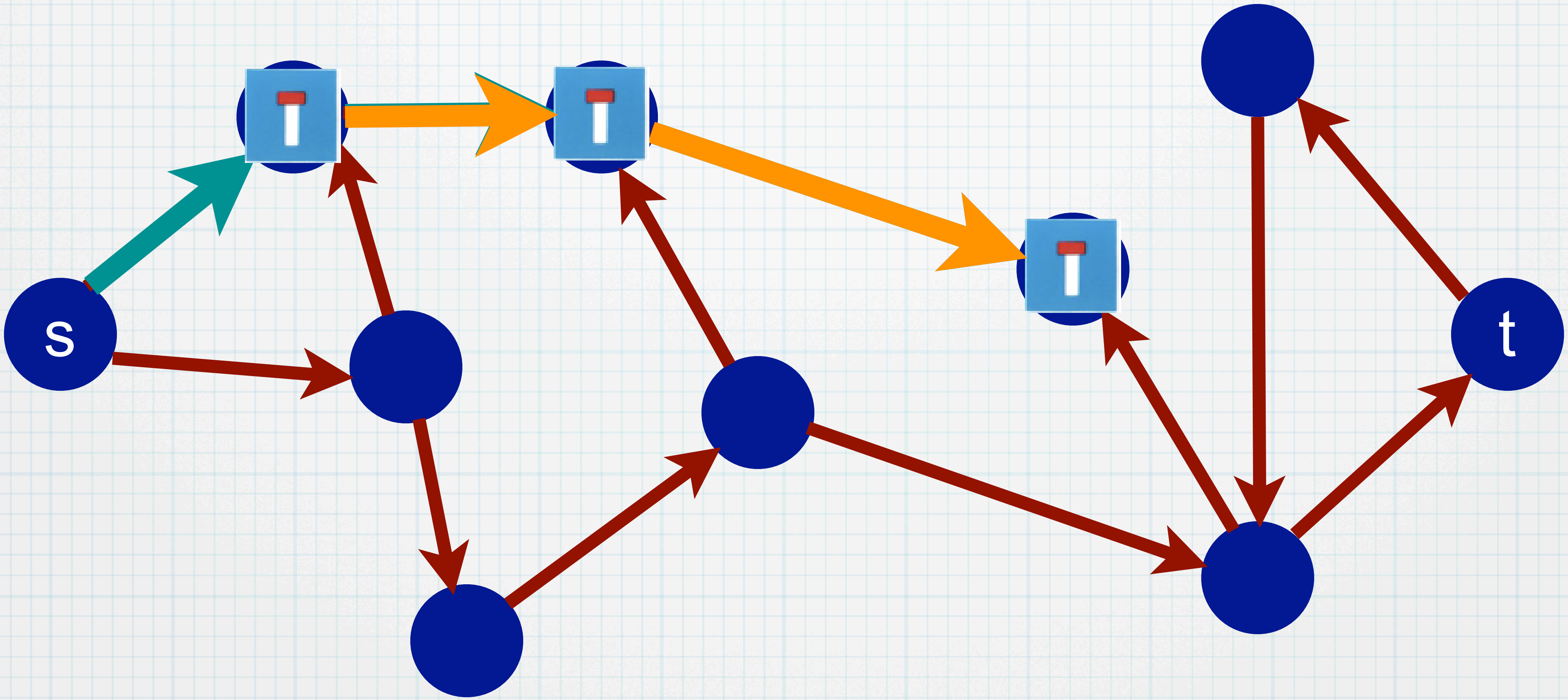
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון
שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



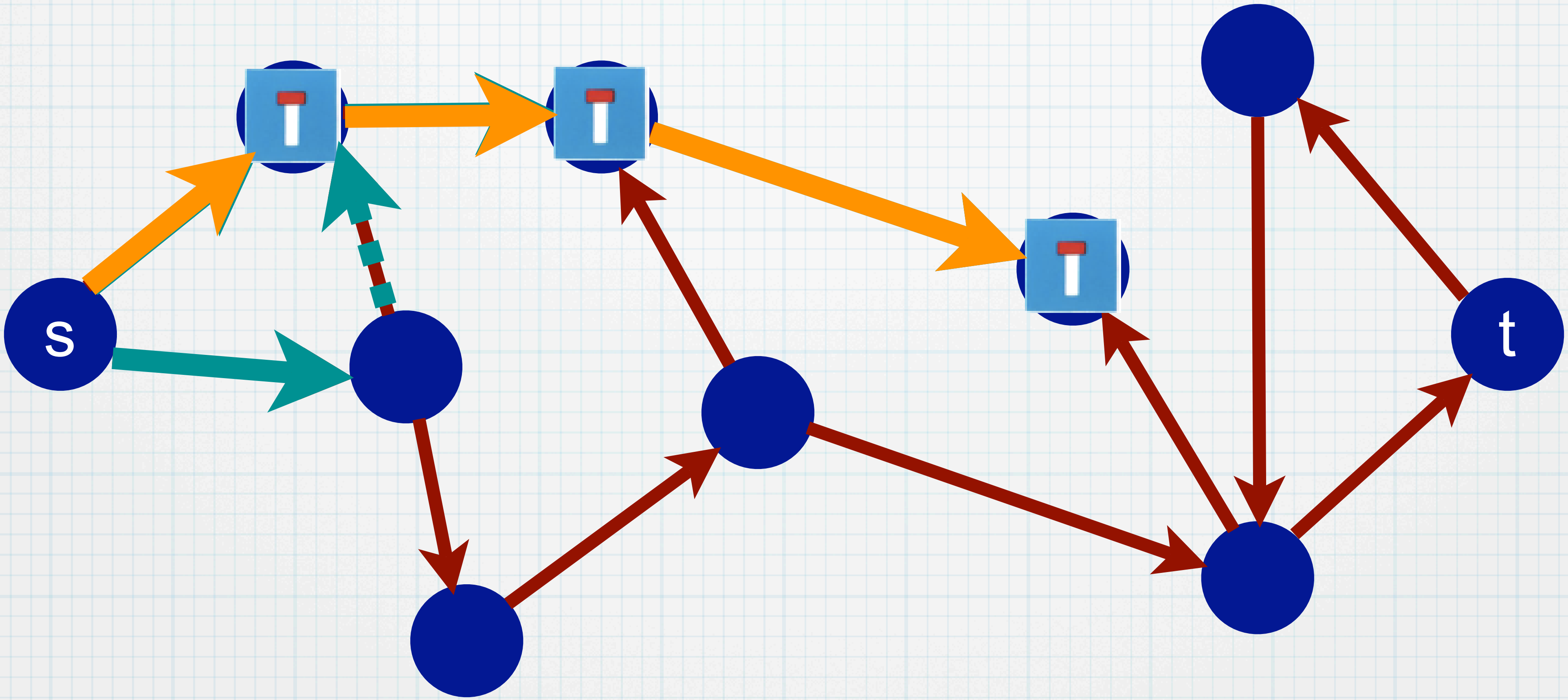
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון
שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



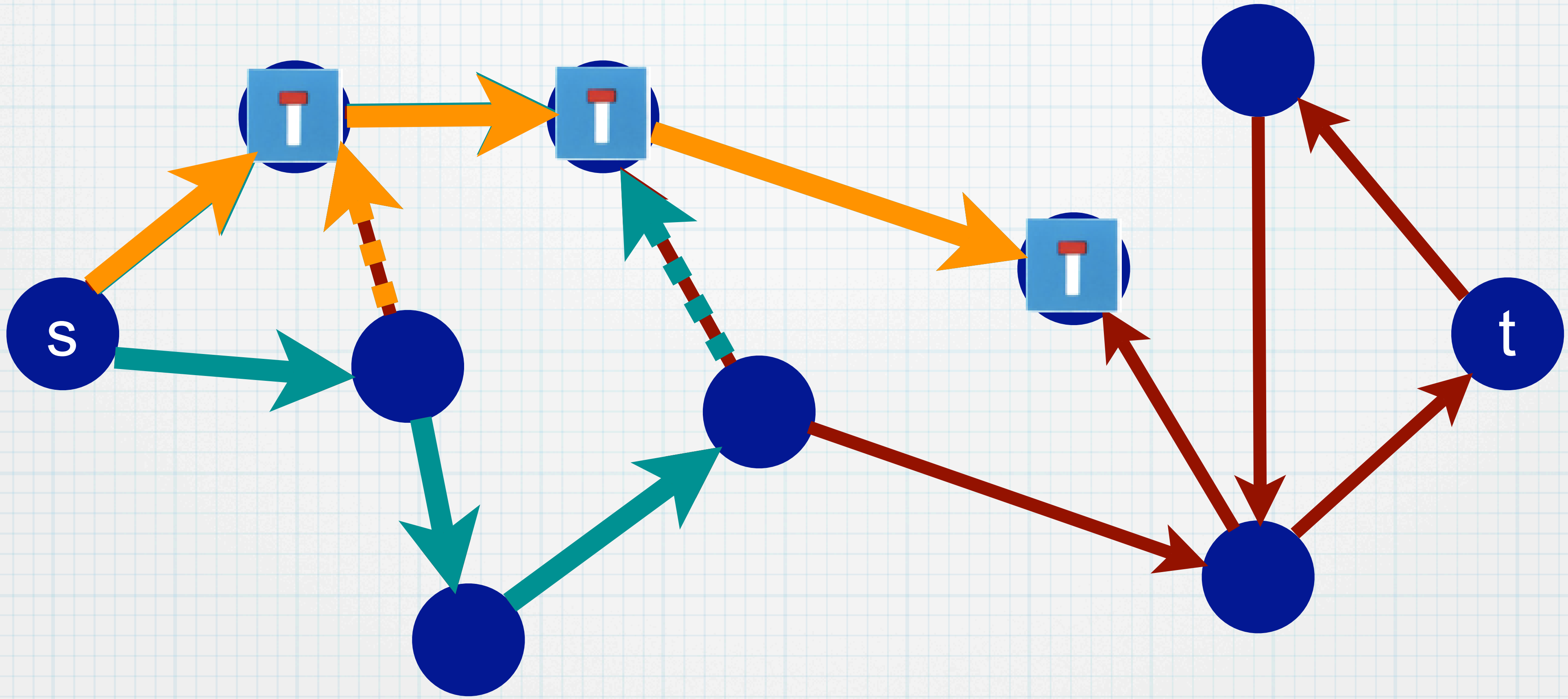
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



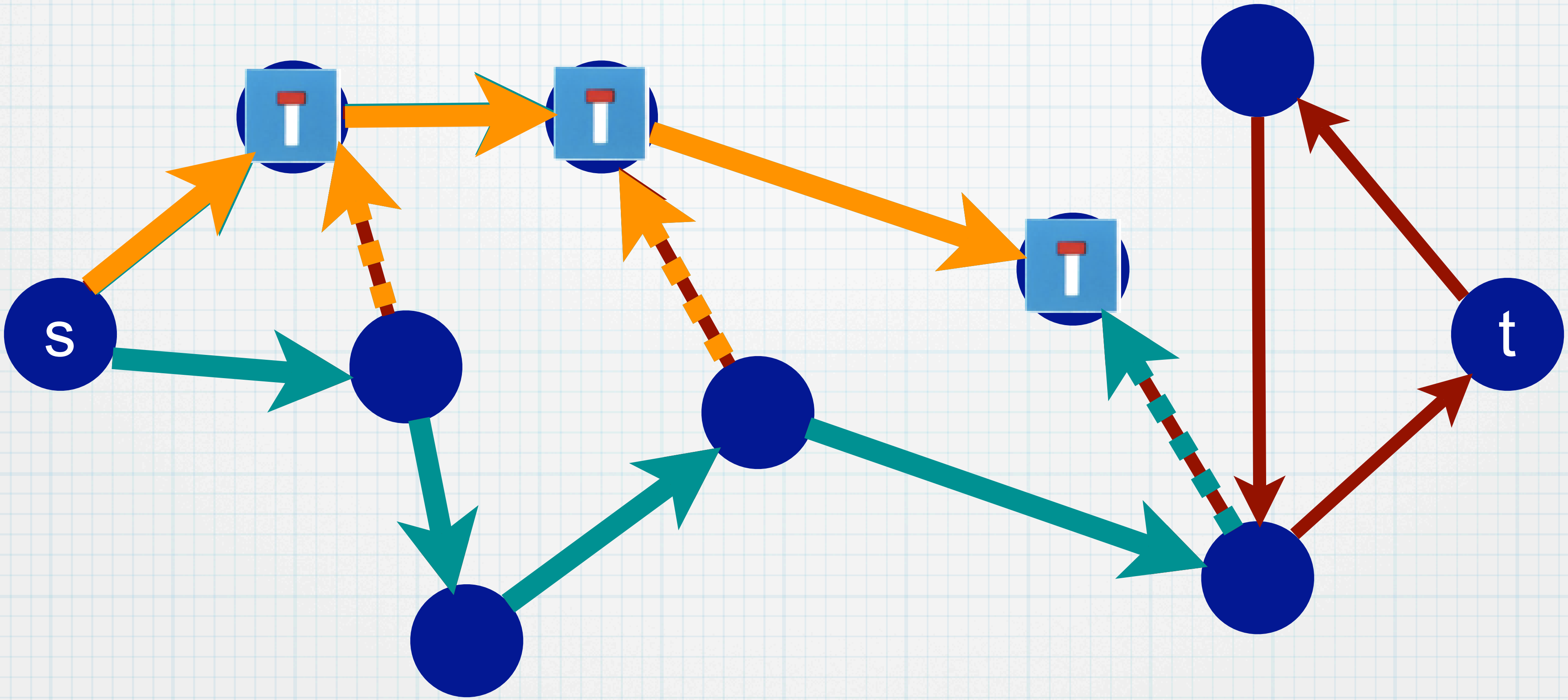
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון
שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



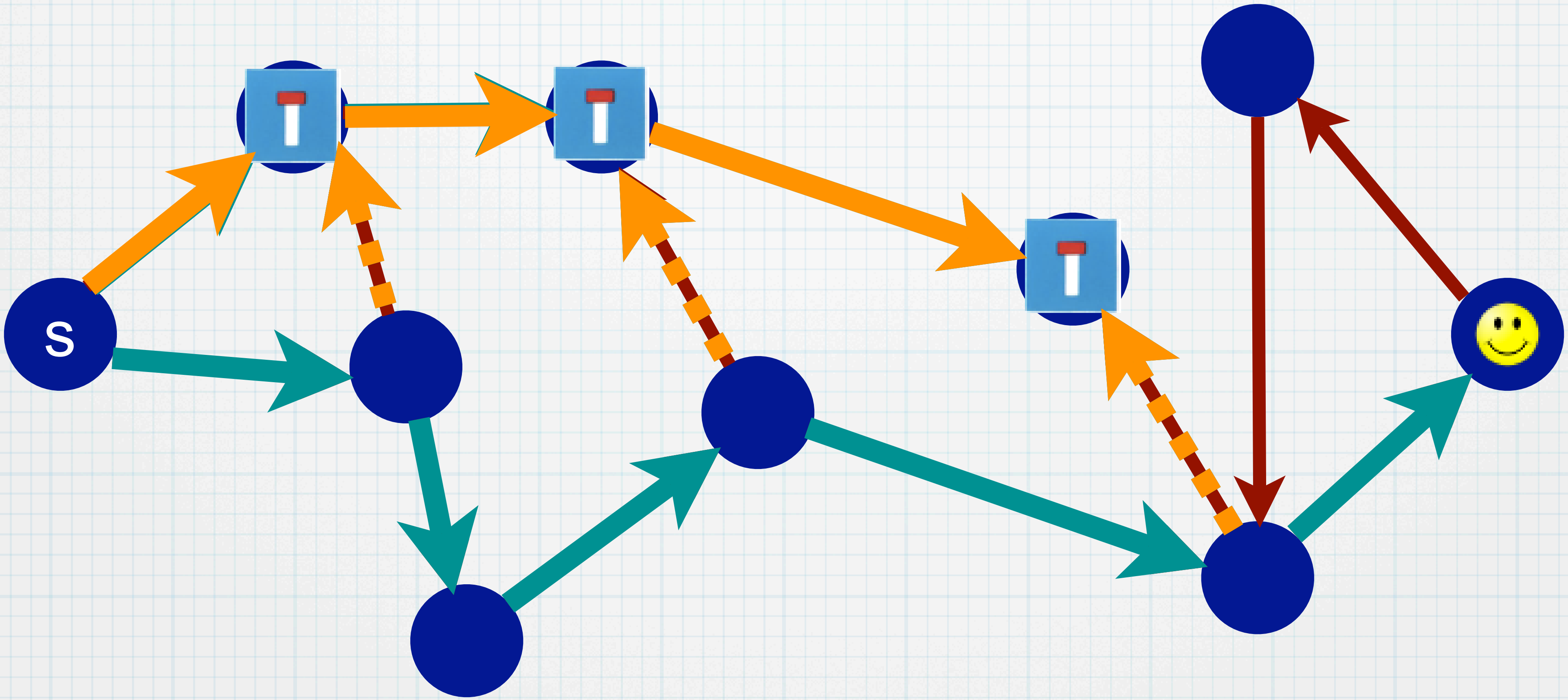
כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון
שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

תיקון



כשנתקעים במבוי סתום, נבטל את הצעד האחרון
שנכשל, וננסה כיוון התקדמות אחר.

```
connectivity(G,s,t)
  for each x ∈ V do  pre[x]←∞, post[x]←∞, from[x]←nil
  pre_c ← 0, post_c ← 0
  DFS(G,s)
return pre[t] < ∞

DFS(G,x)
  pre[x] ← pre_c++
  for each y ∈ Adj[x] do
    if pre[y] = ∞ then
      from[y] ← x
      DFS(G,y)
    end if
  end for
  post[x] ← post_c++
end DFS
```

סריקה לעומק (DFS)

בצעד הזה מגלים את x

בצעד הזה נאמר שהקשת (x,y) נסרקה

בצעד הזה חוזרים מ-x

סדר הגילוי: pre[x]
סדר החזרה: post[x]

סיבוכיות

אתחול: $O(|V|)$

מבצעים DFS(G,x) לכל היותר פעם אחת לכל x.
נחייב את הקריאה ל-DFS(G,x) על x.
למעט הקריאות הרקורסיביות, DFS(G,x) עולה $O(1)+O(|Adj[x]|)$

סה"כ: $O(|V|) + \sum_{x \in V} \{O(1) + O(|Adj[x]|)\} = O(|V|+|E|)$

סיווג הקשתות

הקשתות הנסרקות נחלקות לארבעה סוגים. קשת שנסרקה (x,y) היא:

קשת עץ, אם from[y] = x (כלומר, סריקתה גילתה את y).

קשת קדימה, אם איננה קשת עץ, אבל y נתגלה בין גילוי x לחזרה מ-x.

קשת אחורה, אם x נתגלה בין גילוי y לחזרה מ-y.

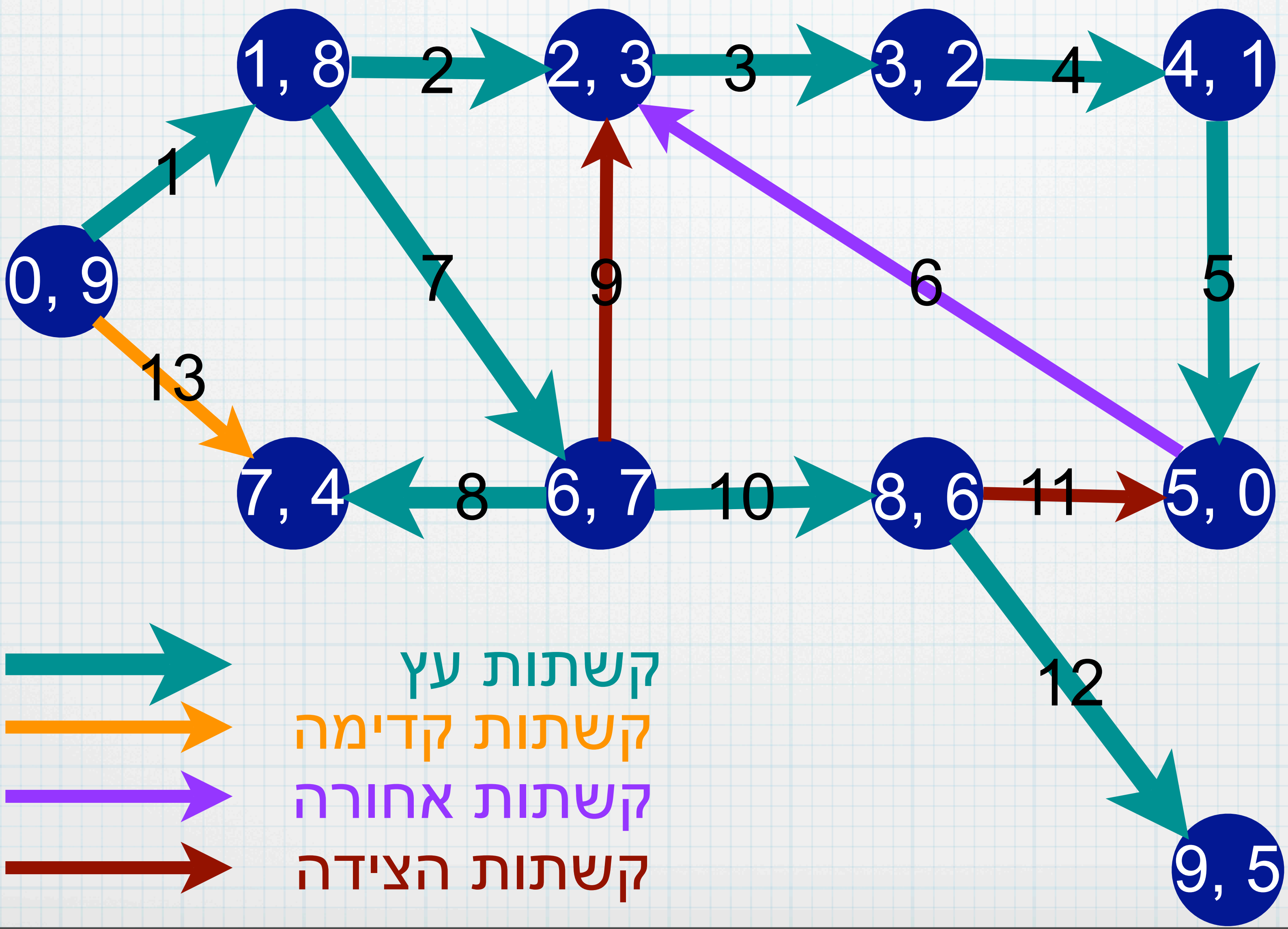
קשת הצידה, אם האפשרויות האחרות לא נתקיימו.

הגרף T_{DFS} הנפרש על ידי קשתות העץ הוא עץ מכוון ששורשו s, והוא פורש את כל הצמתים הנגישים מ-s.

הדגמה

המספרים על הקשתות:
סדר הסריקה.

זוגות המספרים על הצמתים:
סדר הגילוי וסדר החזרה.



הערות

אפשר להריץ את האלגוריתם על גרף לא מכוון.

- כל קשת {x,y} תיסרק בשני כיוונים: מ-x ל-y ומ-y ל-x.
- רק הסריקה הראשונה יכולה לגלות צומת חדש.

1. הוכיחו כי בסריקה לעומק של גרף לא מכוון אין קשתות הצידה. (הערה: בגרף לא מכוון אין הבדל בין קשתות קדימה וקשתות אחורה - שכנעו את עצמכם שכל הקשתות הללו נסרקות לראשונה בכיוון אחורה.)

2. הוכיחו כי ב-G יש מעגל פשוט המכיל את s אםם בכל הרצת DFS מ-s מקבלים לפחות קשת אחת אחורה שנכנסת ל-s.

רכיבים אי פריקים

הגדרה: נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
יהי $\backsim$ יחס שקילות על E, שמקיים $x \backsim y$ אםם $x = y$
או שיש מעגל פשוט שמכיל את x ו-y.
תתי הגרף הנפרשים על ידי מחלקות השקילות של $\backsim$
נקראים הרכיבים האי-פריקים של G.

שימו לב: הרכיבים האי-פריקים זרים בקשתות, אבל לא בהכרח זרים בצמתים.

הקלט: גרף לא מכוון G

הפלט: חלוקה של G לרכיבים אי פריקים.

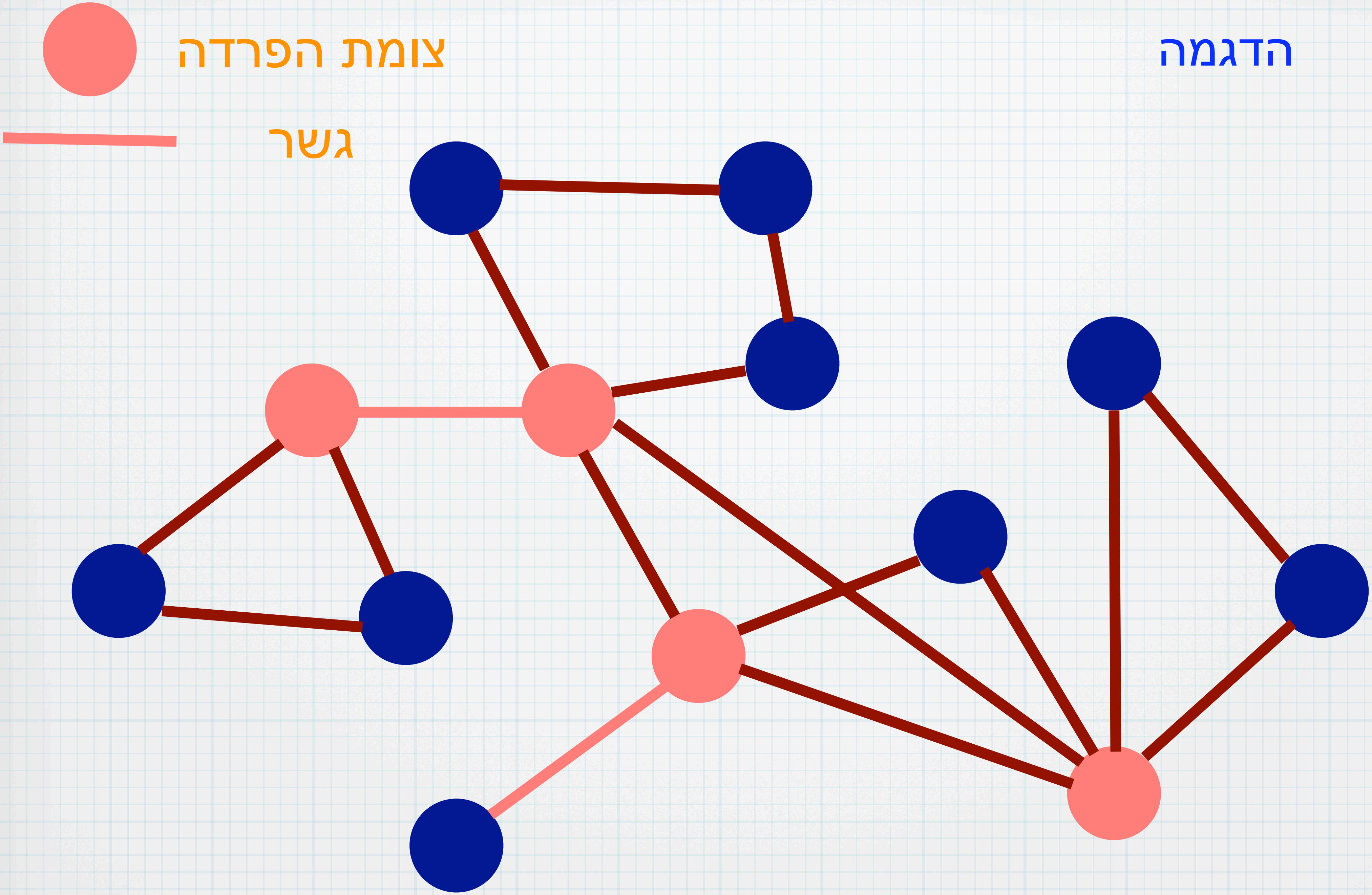
תכונות

הגדרה: צומת $x \in V$ נקרא צומת הפרדה אסם הסרתו מגדילה את מספר הרכיבים הקשירים של הגרף. קשת $e \in E$ נקראת גשר אסם הסרתה מגדילה את מספר הרכיבים הקשירים של הגרף.

גשר ≡ רכיב אי-פריק עם קשת אחת.
צומת הפרדה ≡ חיתוך בין שני רכיבים אי-פריקים לא זרים.

יהי G גרף. נסמן ב-bc(G) את הגרף שצמתיו הרכיבים האי-פריקים של G וצמתי ההפרדה של G וקשתותיו מחברות בין כל הזוגות של רכיב אי-פריק וצומת הפרדה שמוכל בו. אזי bc(G) הוא עץ.

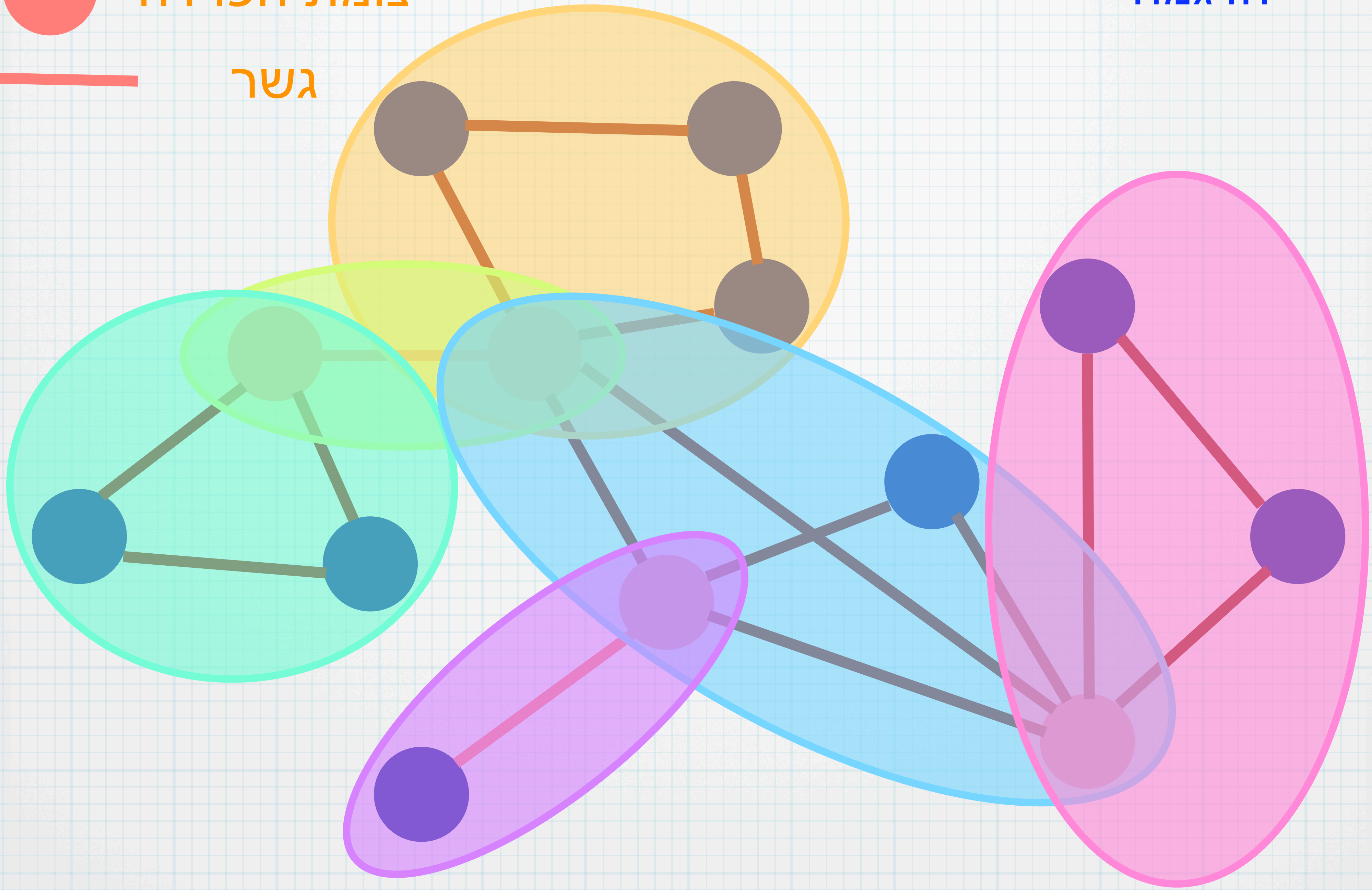
הדגמה



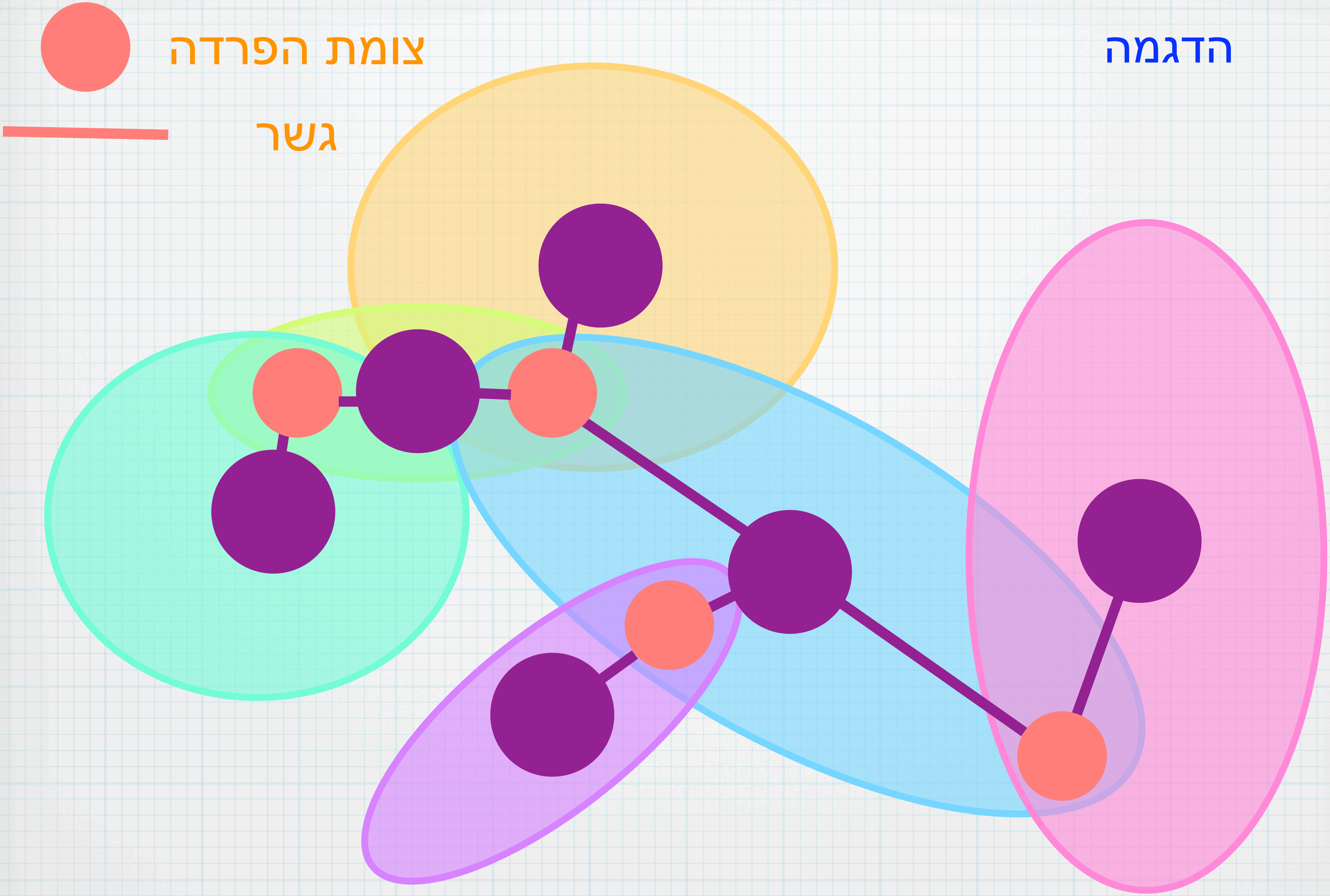
הדגמה

צומת הפרדה

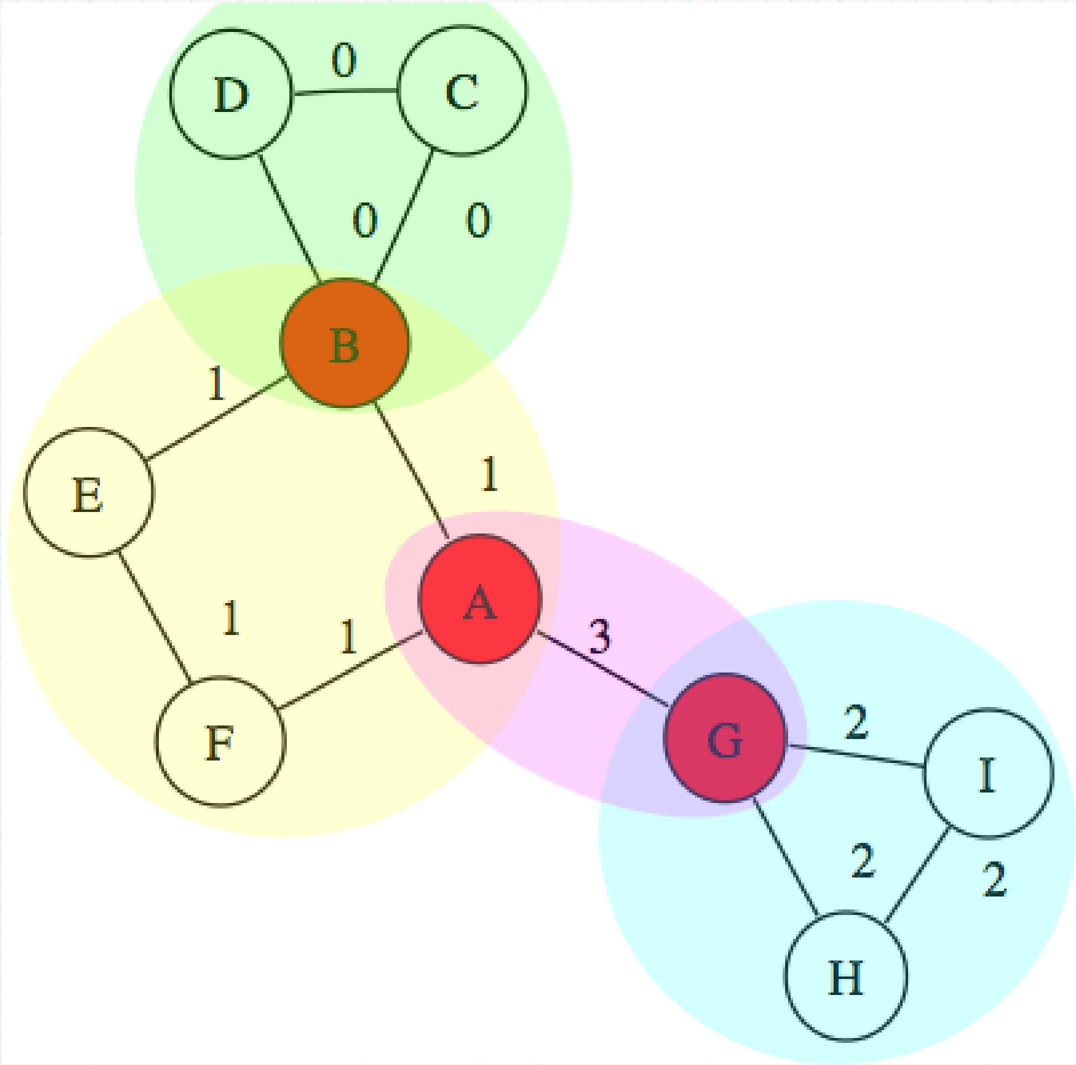
גשר



הדגמה



הדגמה



זיהוי צמתי הפרדה

נריץ סריקה לעומק של גרף קשיר G החל מצומת s כלשהו. נתבונן בעץ המכוון T_{DFS}.

משפט:
השורש s הוא צומת הפרדה אם יש לו לפחות שני ילדים.
כל צומת אחר x הוא צומת הפרדה אם יש לו ילד y כך שבתת-העץ המושרש ב-y אין אף צומת שממנו קשת אחורה לאב-קדמון של x.

הוכחה

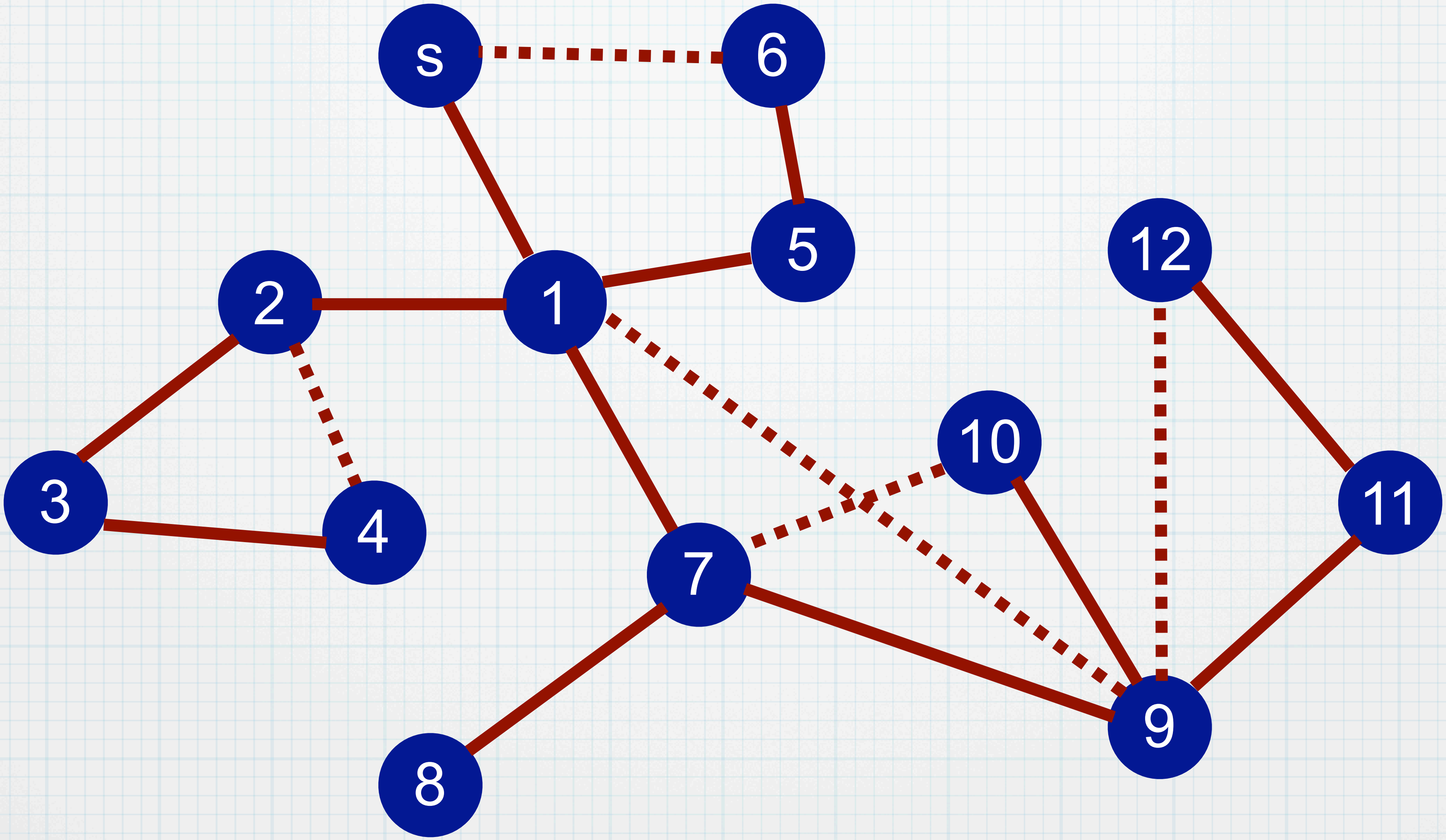
אם ל-s ילד יחיד x, אזי הסרת s מותירה את תת-העץ המושרש ב-x. זהו תת-גרף קשיר של G, לכן s אינו צומת הפרדה. אם ל-s לפחות שני ילדים x ו-y, אזי הסרת s מותירה לפחות שני תתי-עצים המושרשים ב-x וב-y. נניח שיש קשת בין צומת u בתת-עץ אחד לצומת v בתת-העץ האחר. בה"כ u נתגלה לפני v (כלומר, pre[v] < pre[u]). אזי בסריקה מ-u חייבים להגיע ל-v, ולכן v באותו תת-העץ כמו u, וזו סתירה להנחת קיום הקשת. כלומר, תתי-העצים הללו הם רכיבים קשירים נבדלים, ולכן s צומת הפרדה.

הוכחה (המשך)

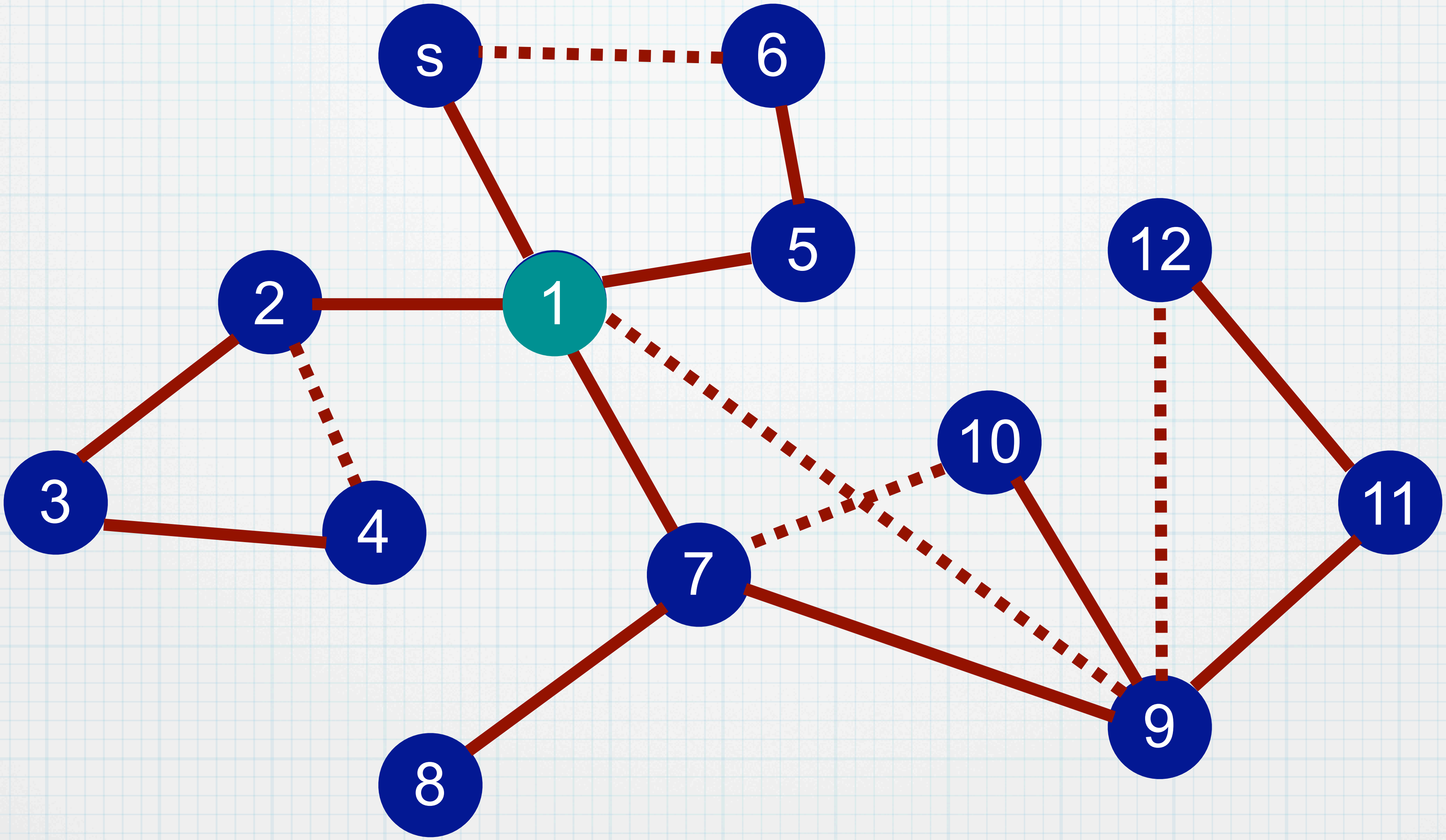
יהי x צומת שאיננו s. אם יש ל-x ילד y שבתת-העץ המושרש בו אין אף צומת עם קשת אחורה לאב קדמון של x, אזי הסרת x מנתקת את תת-העץ המושרש ב-y משאר הגרף: על פי הנתון אין אף קשת מתת-העץ לצומת במסלול מ-s ל-x. בדומה לטיעון הקודם, גם אין קשת מתת-העץ המושרש ב-y לאיזשהו תת-עץ שאינו מכיל את y. ”שאר הגרף“ כולל לפחות צומת אחד, s, ולכן x צומת הפרדה.

אחרת, גם אחרי הסרת x כל תת-עץ שמושרש בילד של x נותר ברכיב הקשיר של s. בוודאי כל הצמתים שאינם בתת-העץ המושרש ב-x נותרים ברכיב הקשיר של s. לכן מספר הרכיבים הקשירים לא עולה, ולכן x איננו צומת הפרדה.

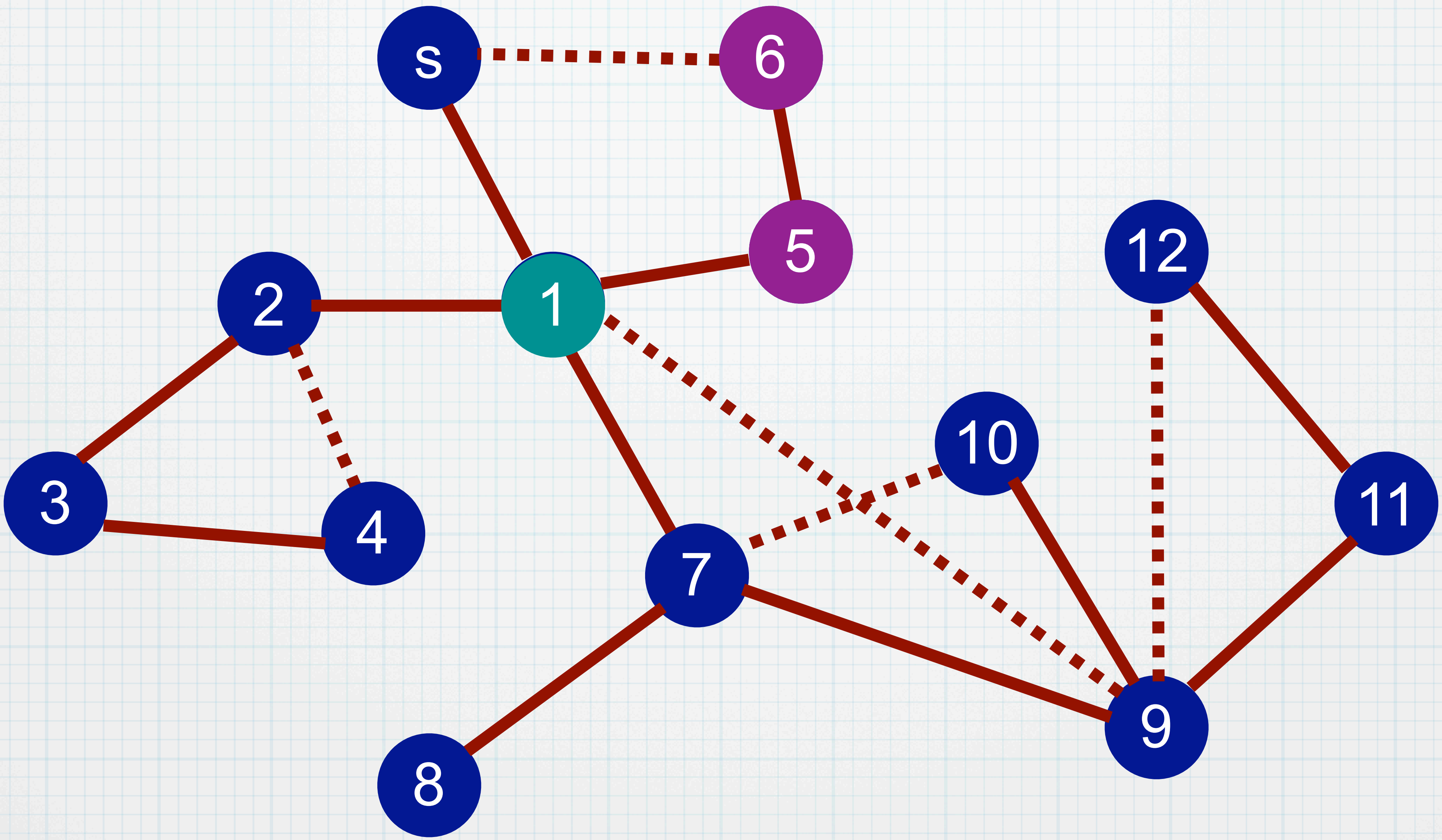
הדגמה



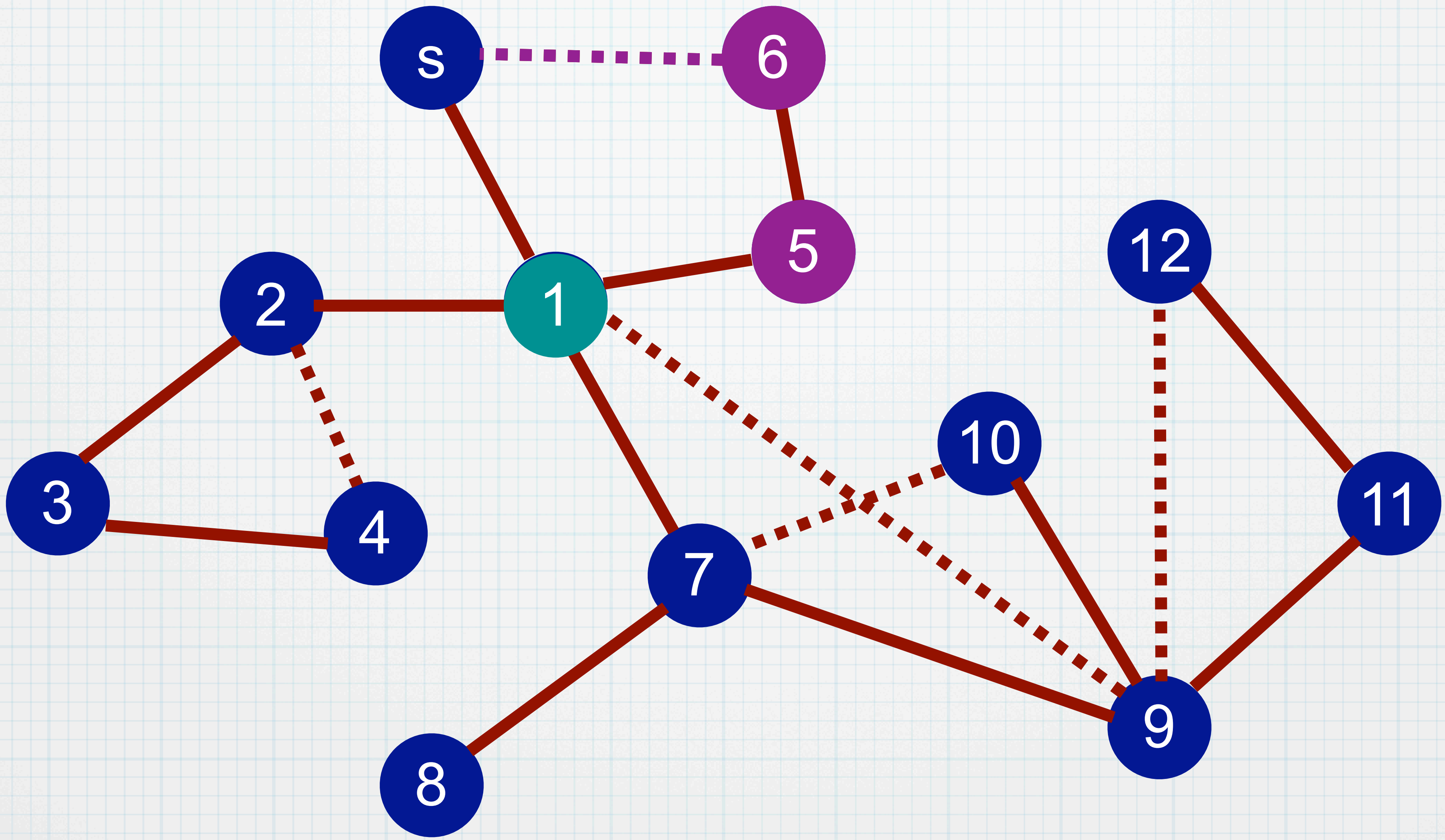
הדגמה



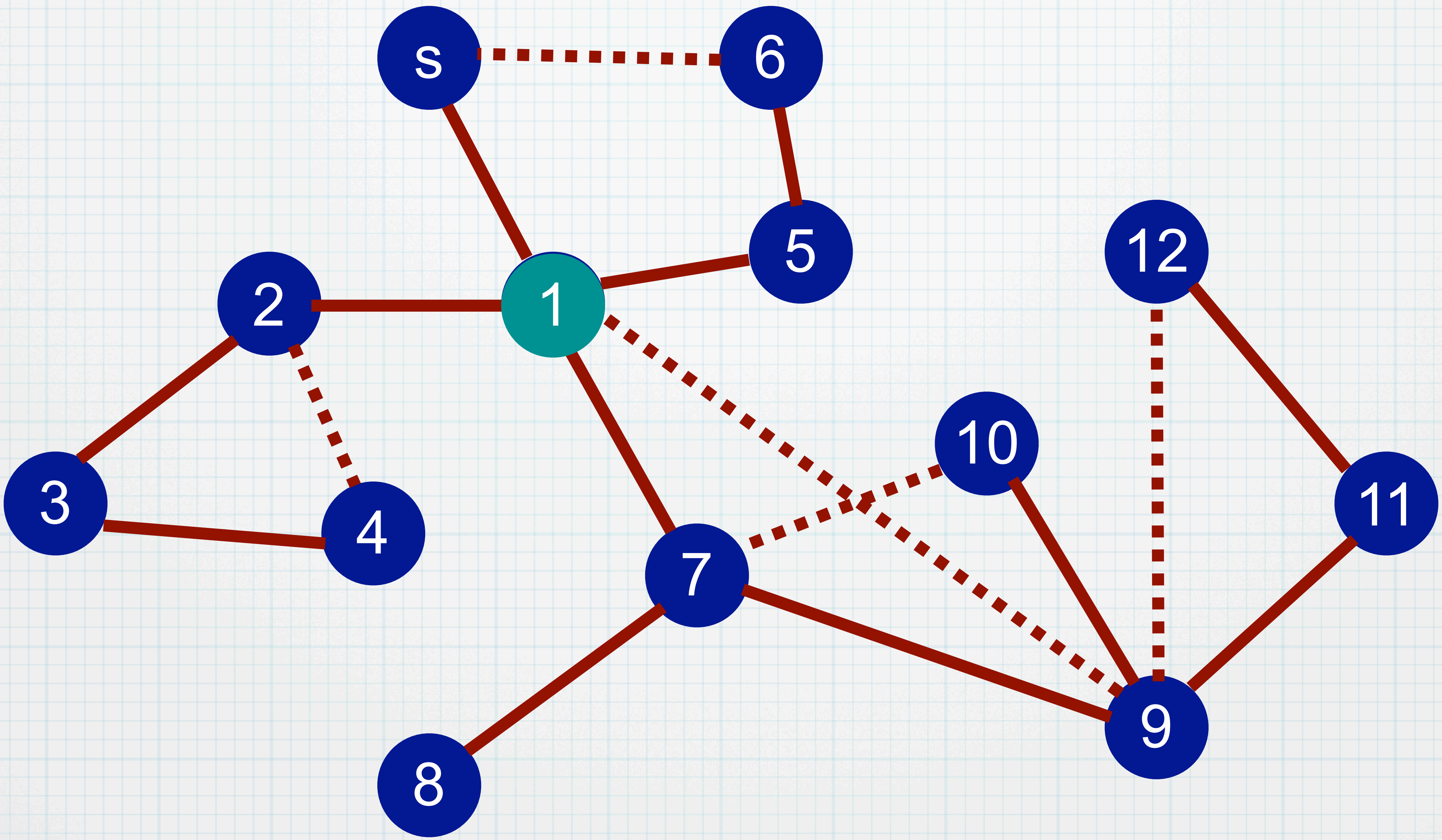
הדגמה



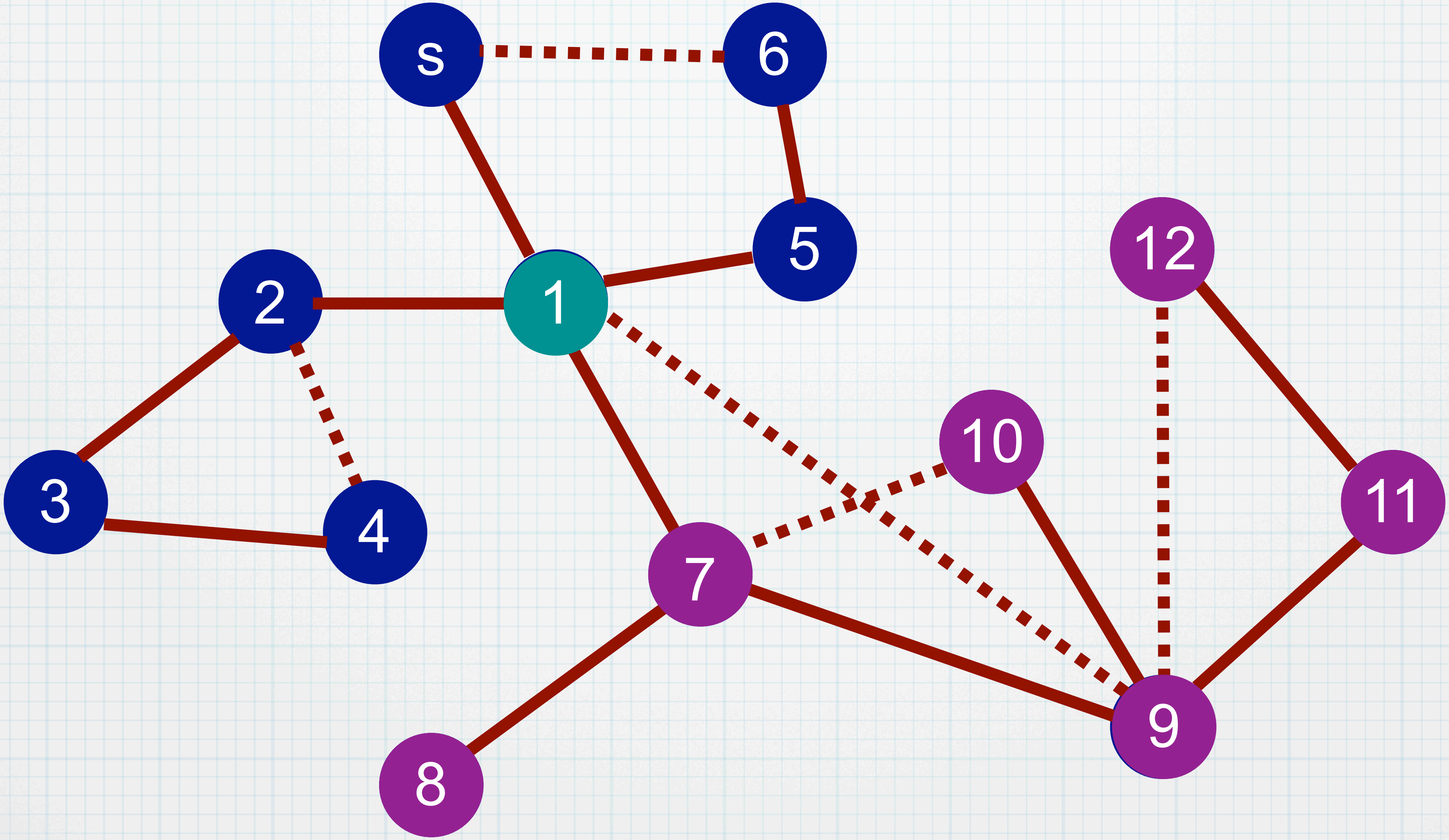
הדגמה



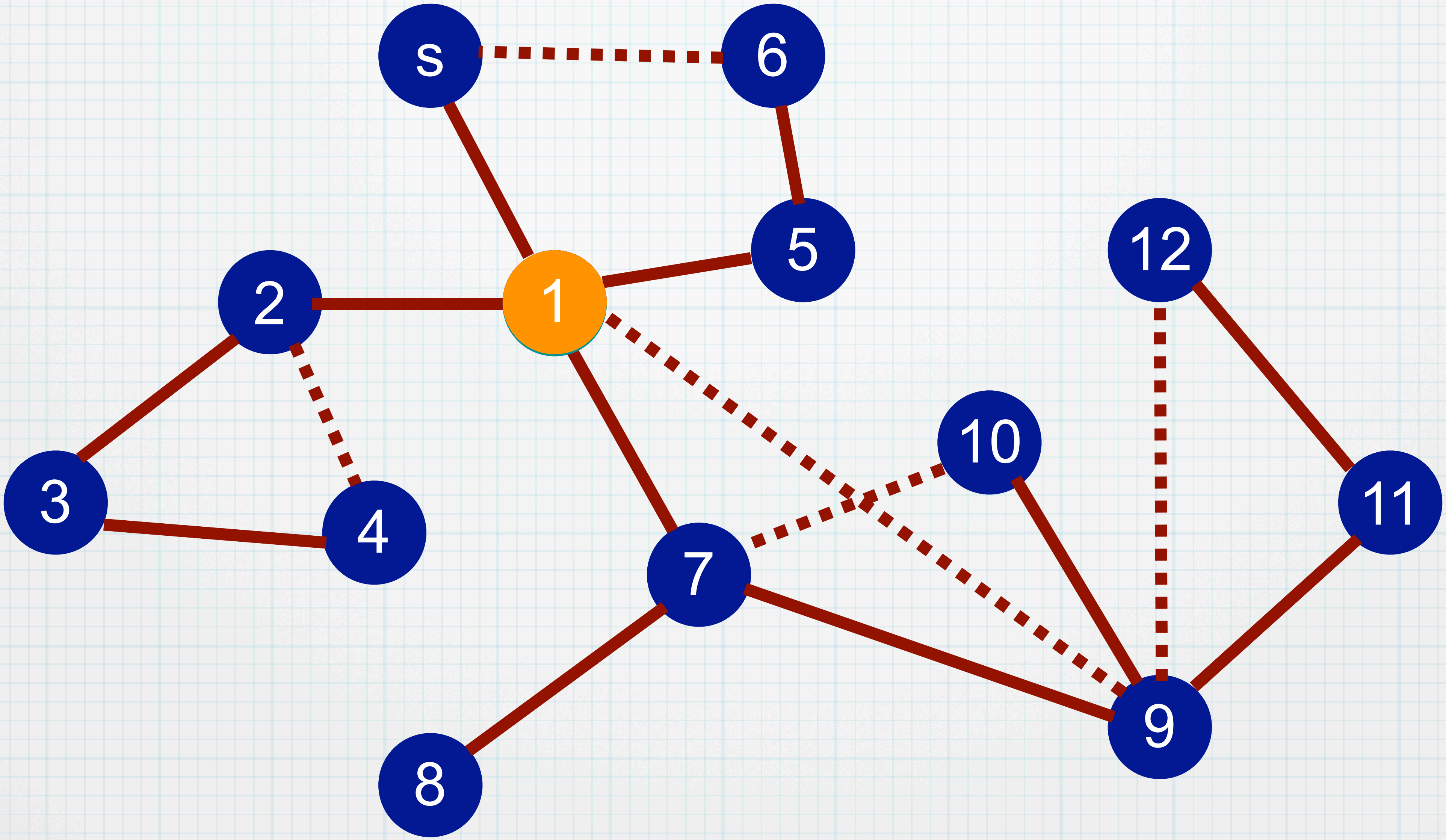
הדגמה



הדגמה



הדגמה



מציאת צמתי הפרדה

נחשב לכל צומת x ערך low[x], שהוא המינימום של pre[z] על כל z שניתן להגיע אליו מתת-העץ המושרש ב-x תוך שימוש בקשת אחורה אחת לכל היותר.

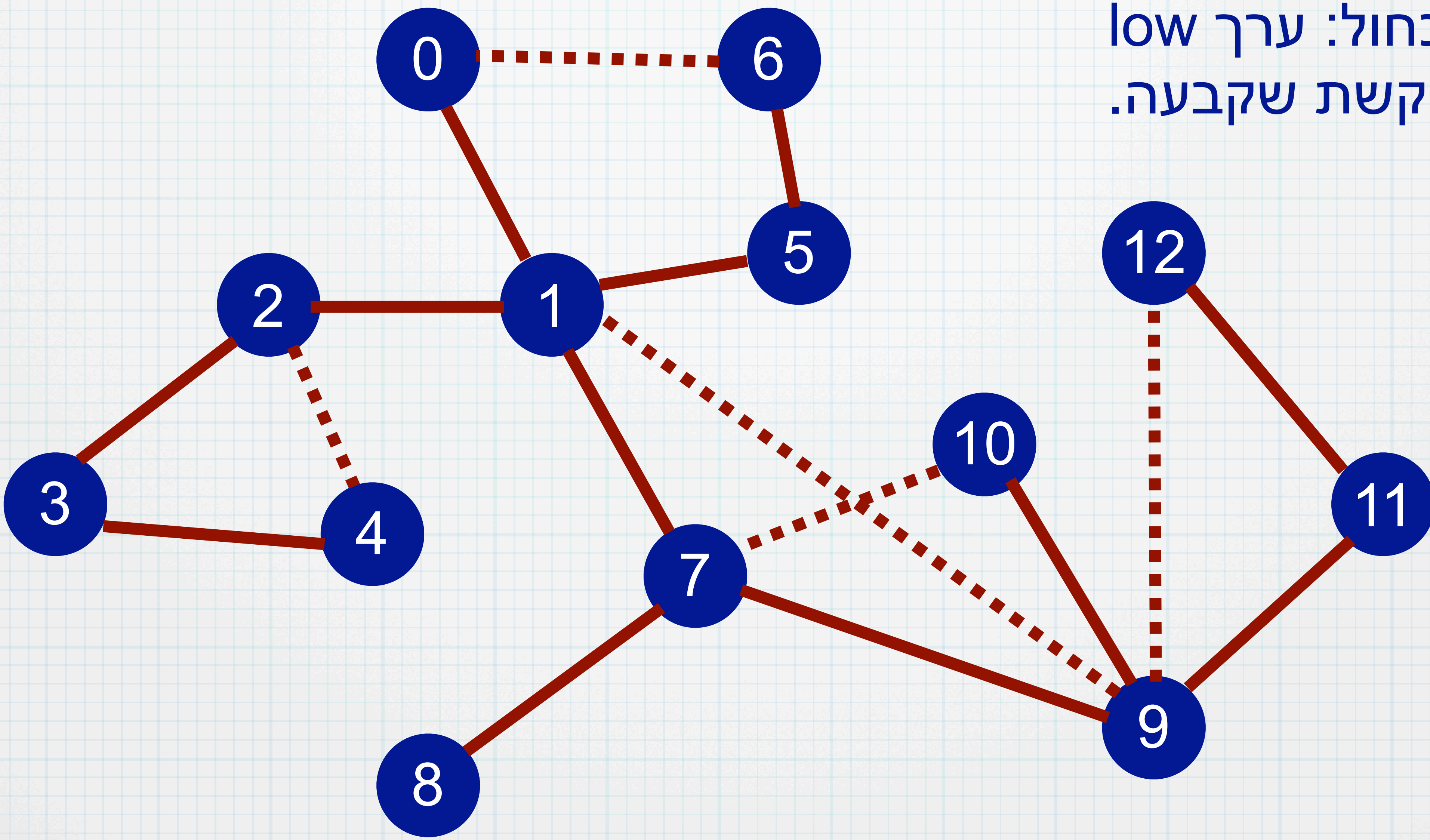
צומת x שאיננו s הוא צומת הפרדה אם יש ל-x ילד y עבורו מתקיים $\text{low}[y] \geq \text{pre}[x]$.

לכל צומת x נחזיק ערך art[x], שיאותחל ל-"no" וישונה ל-"yes" אם נזהה את x כצומת הפרדה.

הערה: קשת {x,y} היא גשר אם היא קשת עץ (x,y) (בחרנו כיוון בה"כ), ו-$\text{low}[y] > \text{pre}[x]$.

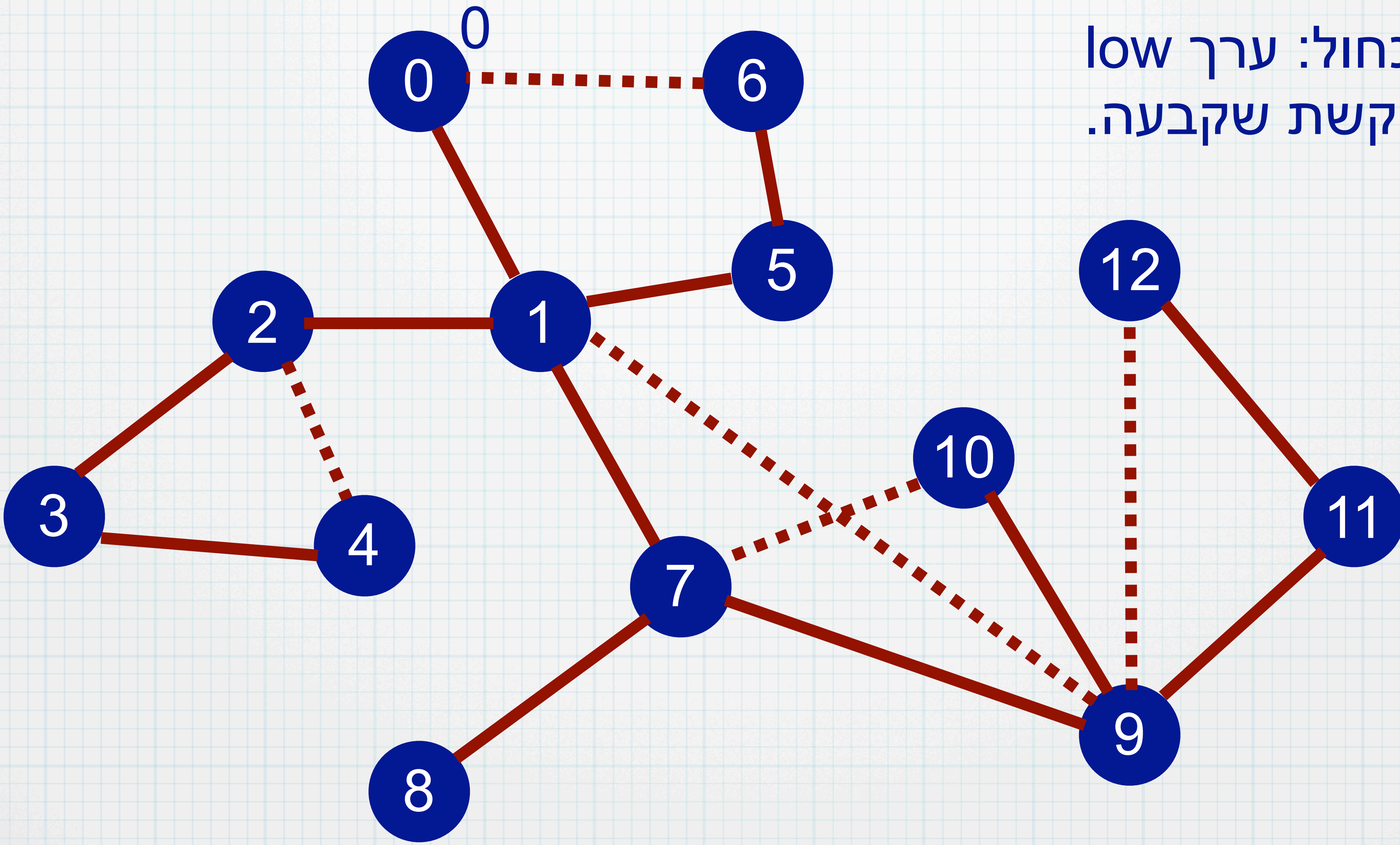
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



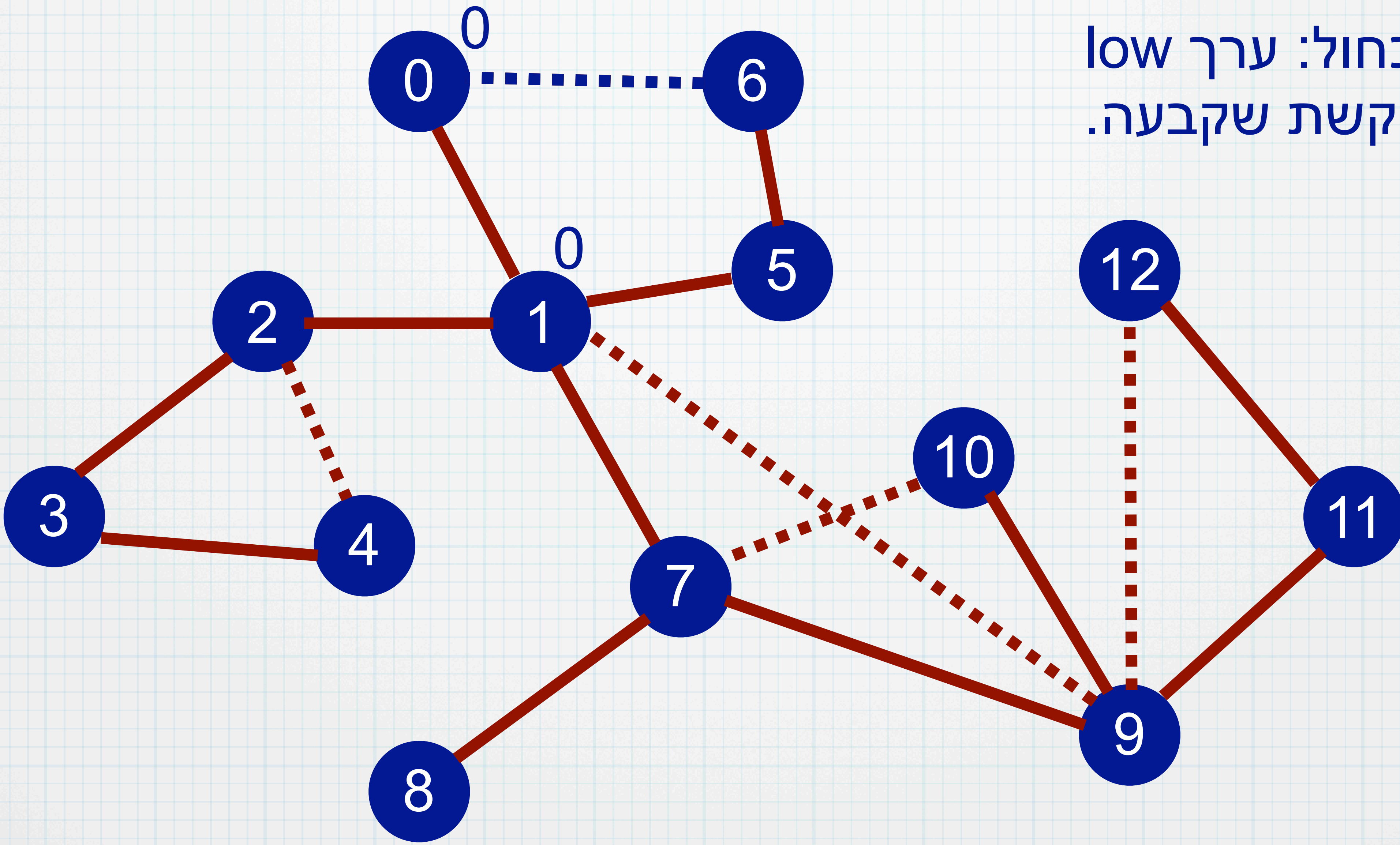
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



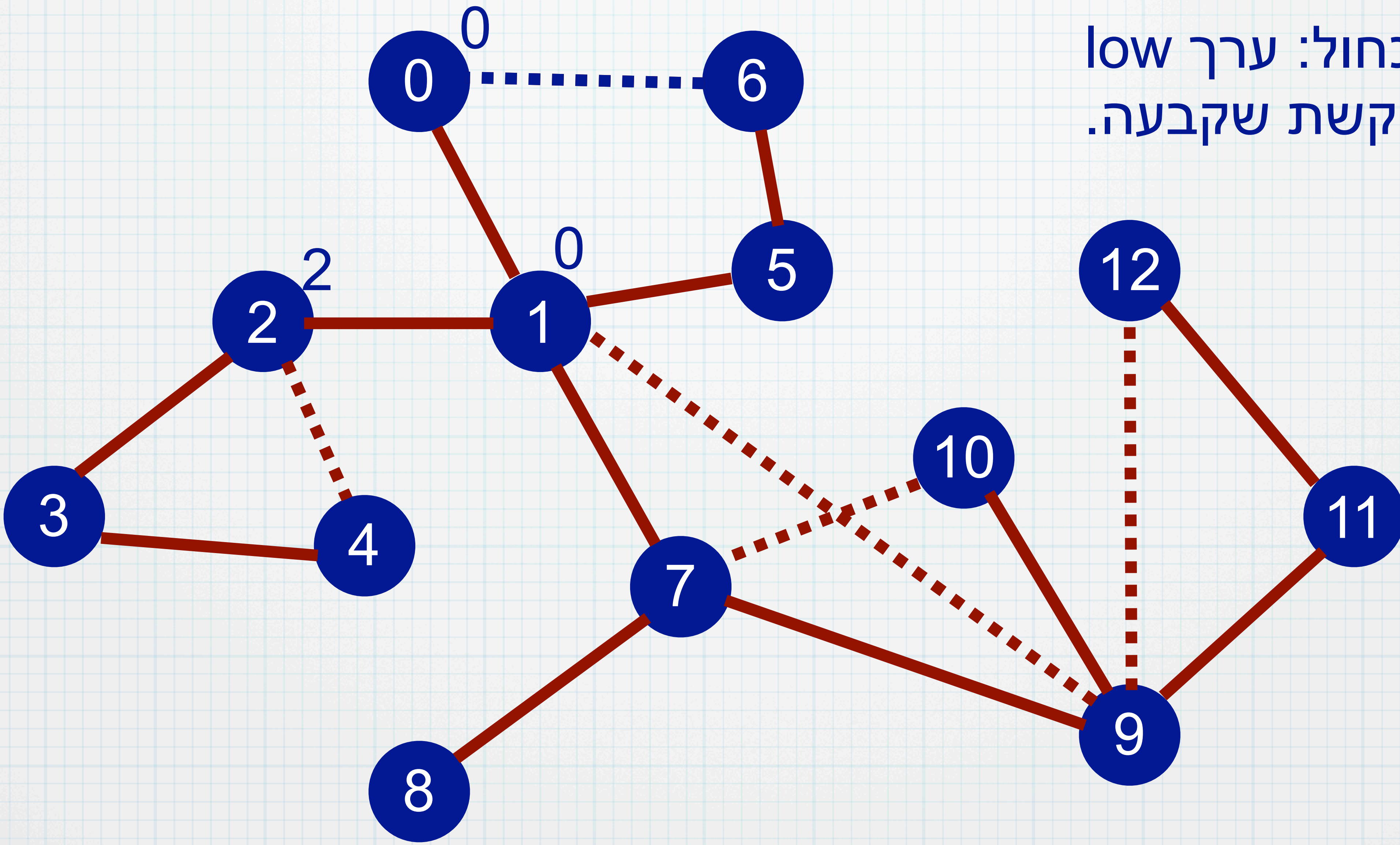
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



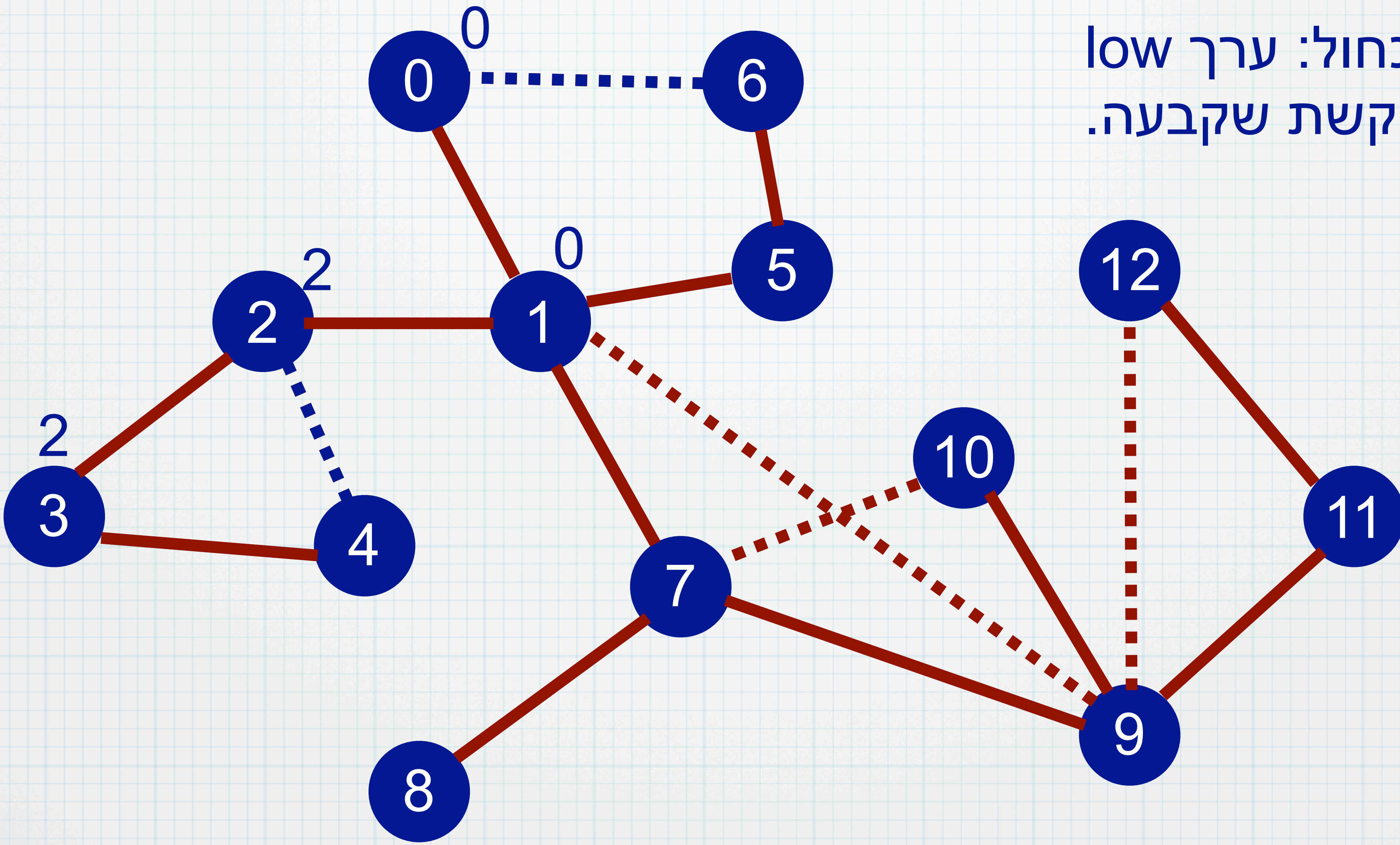
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



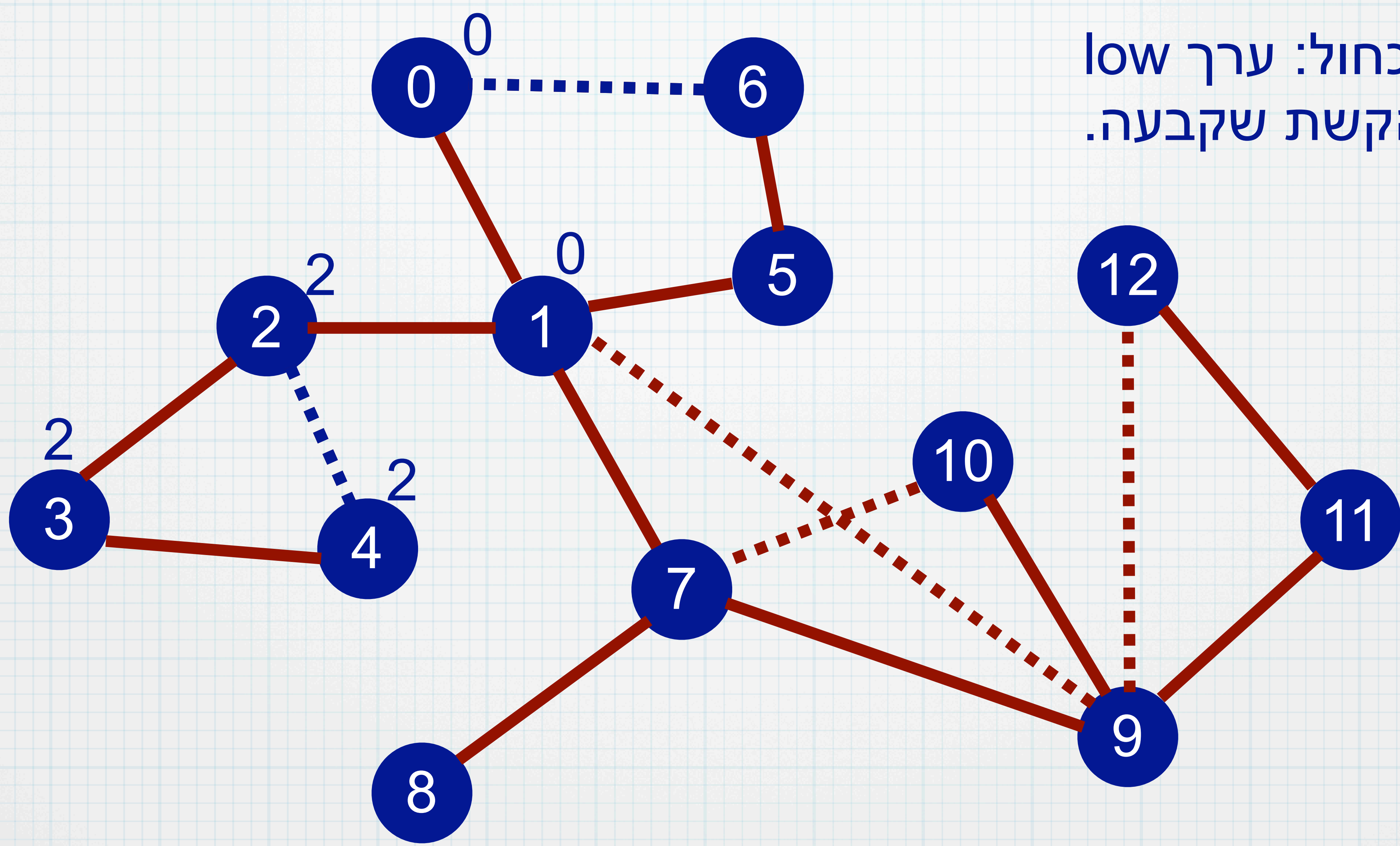
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



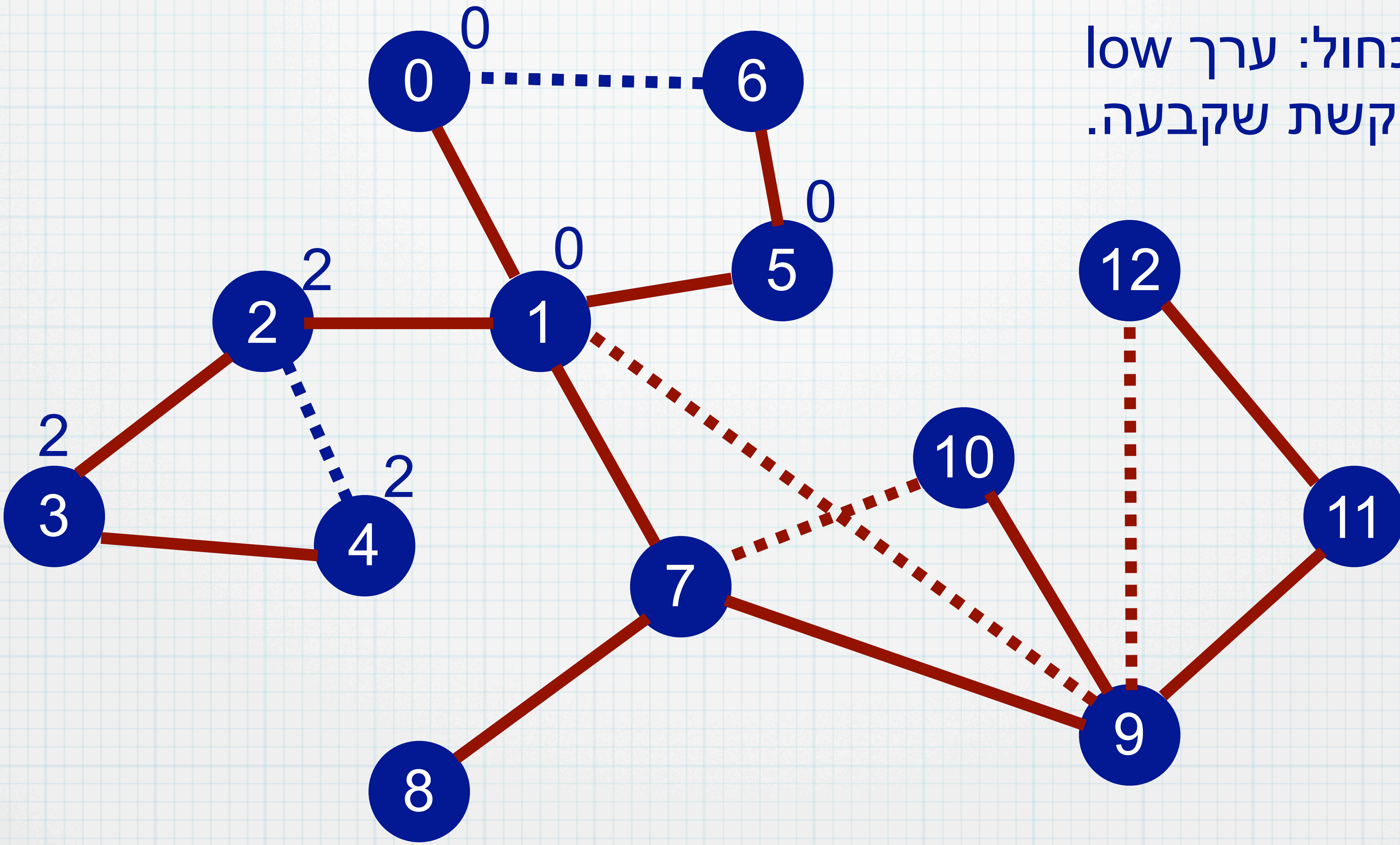
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



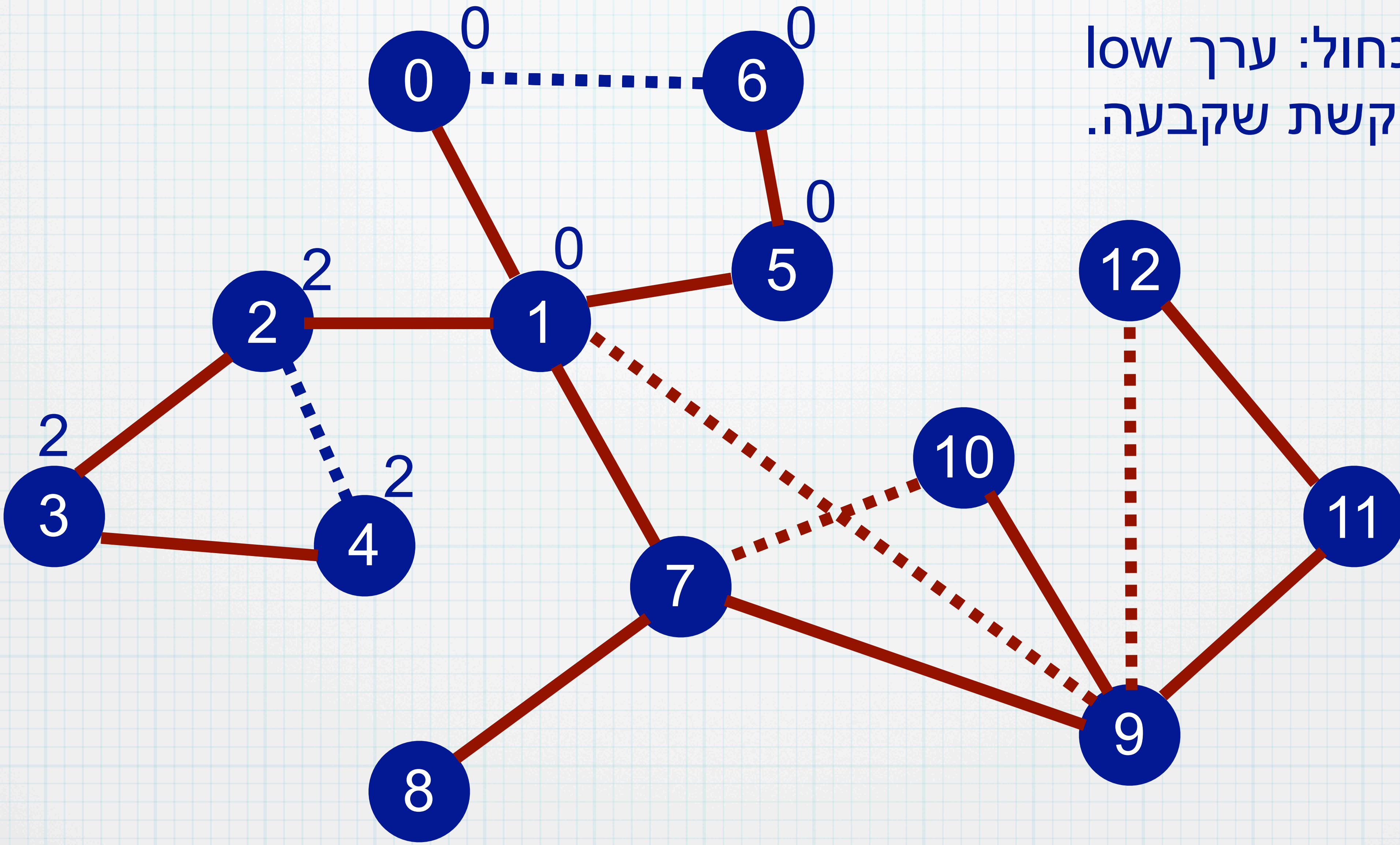
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



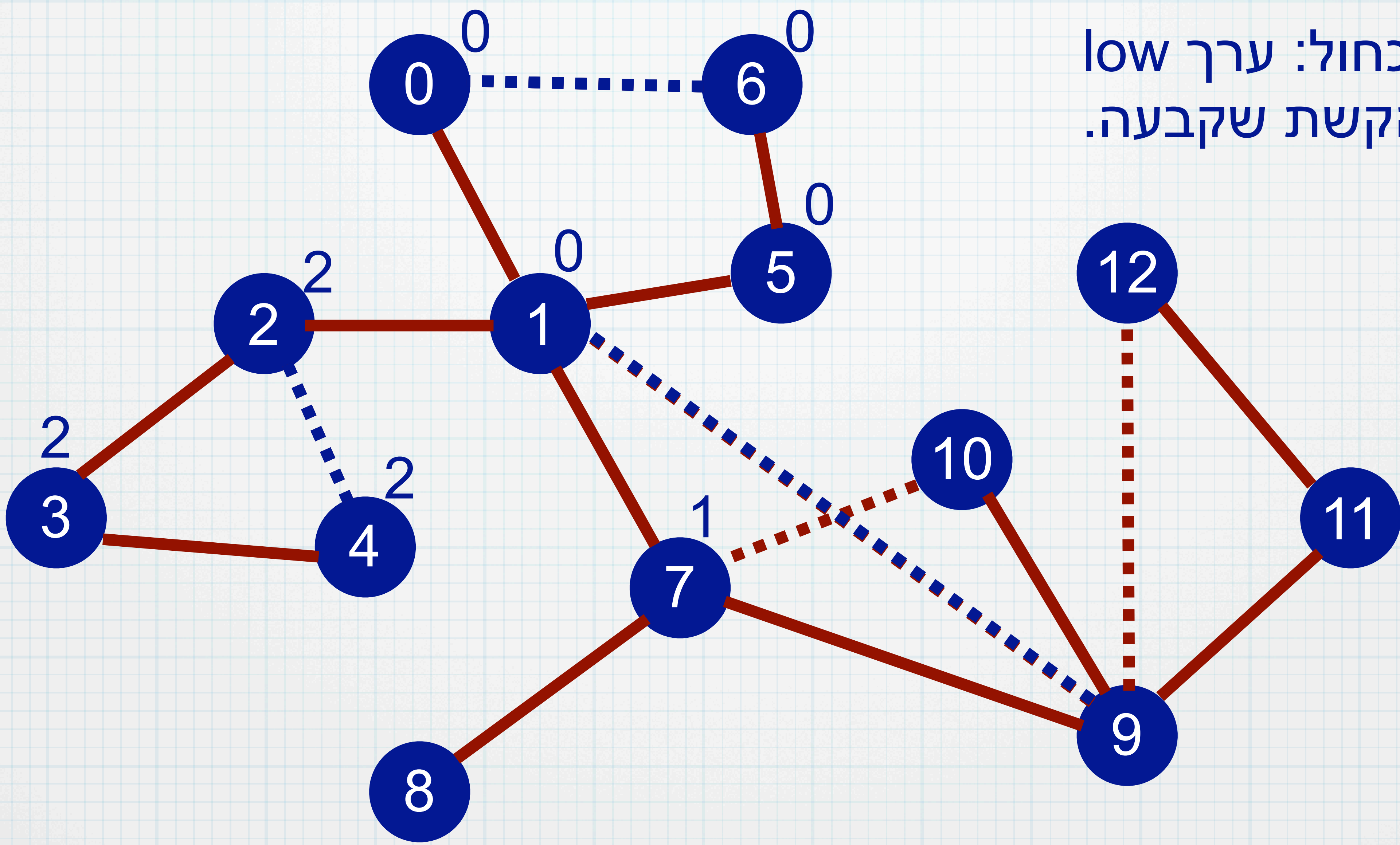
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



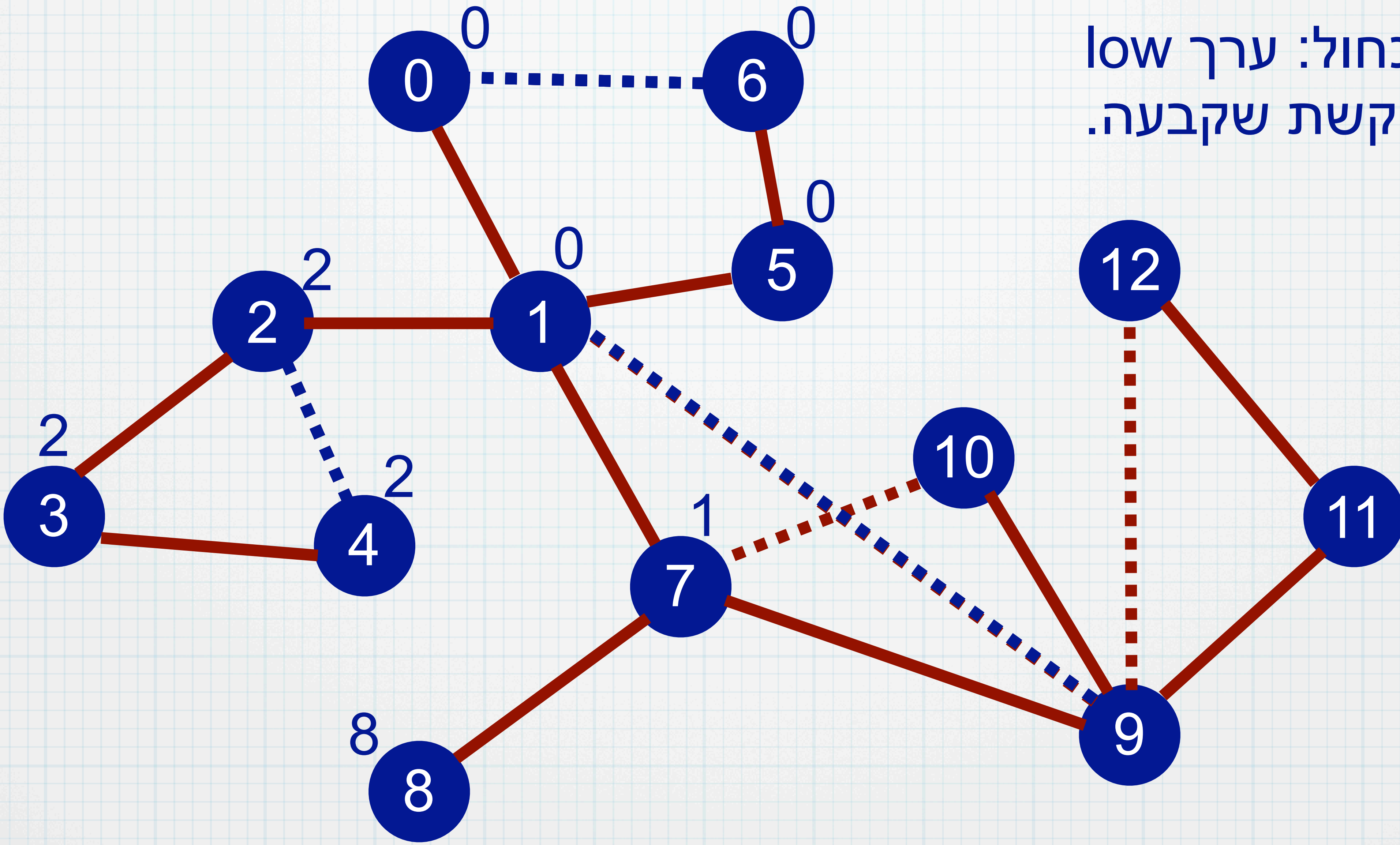
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



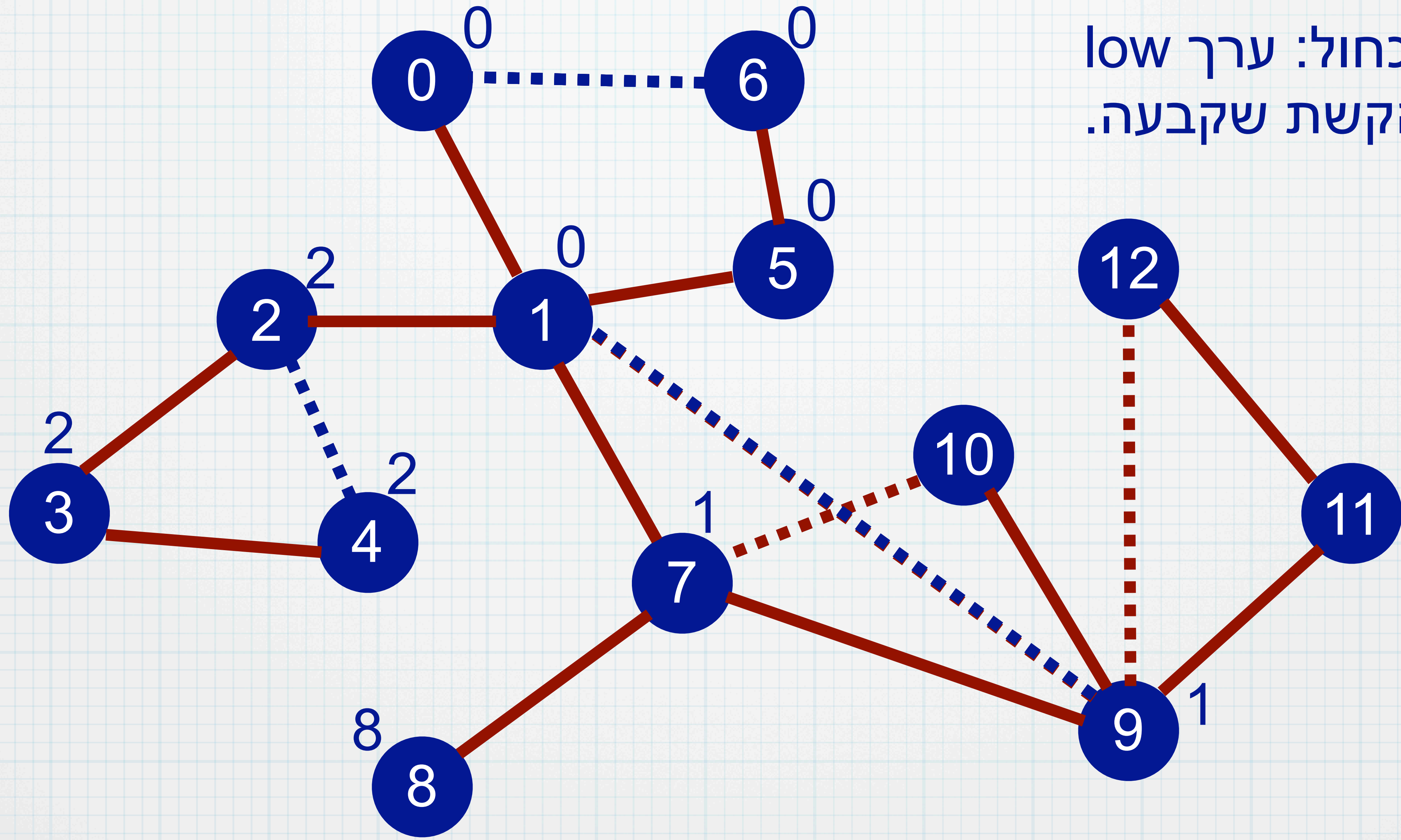
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



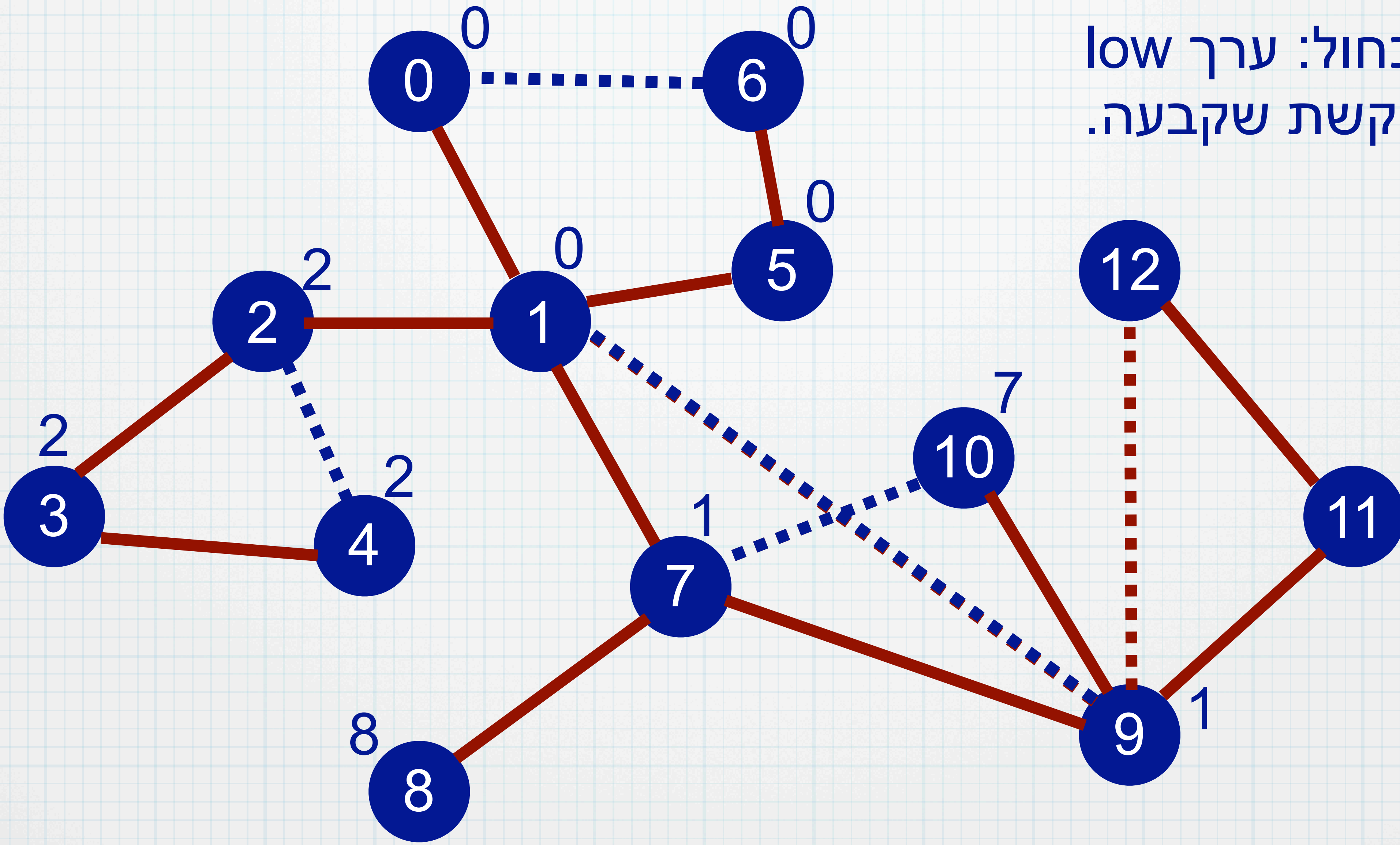
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



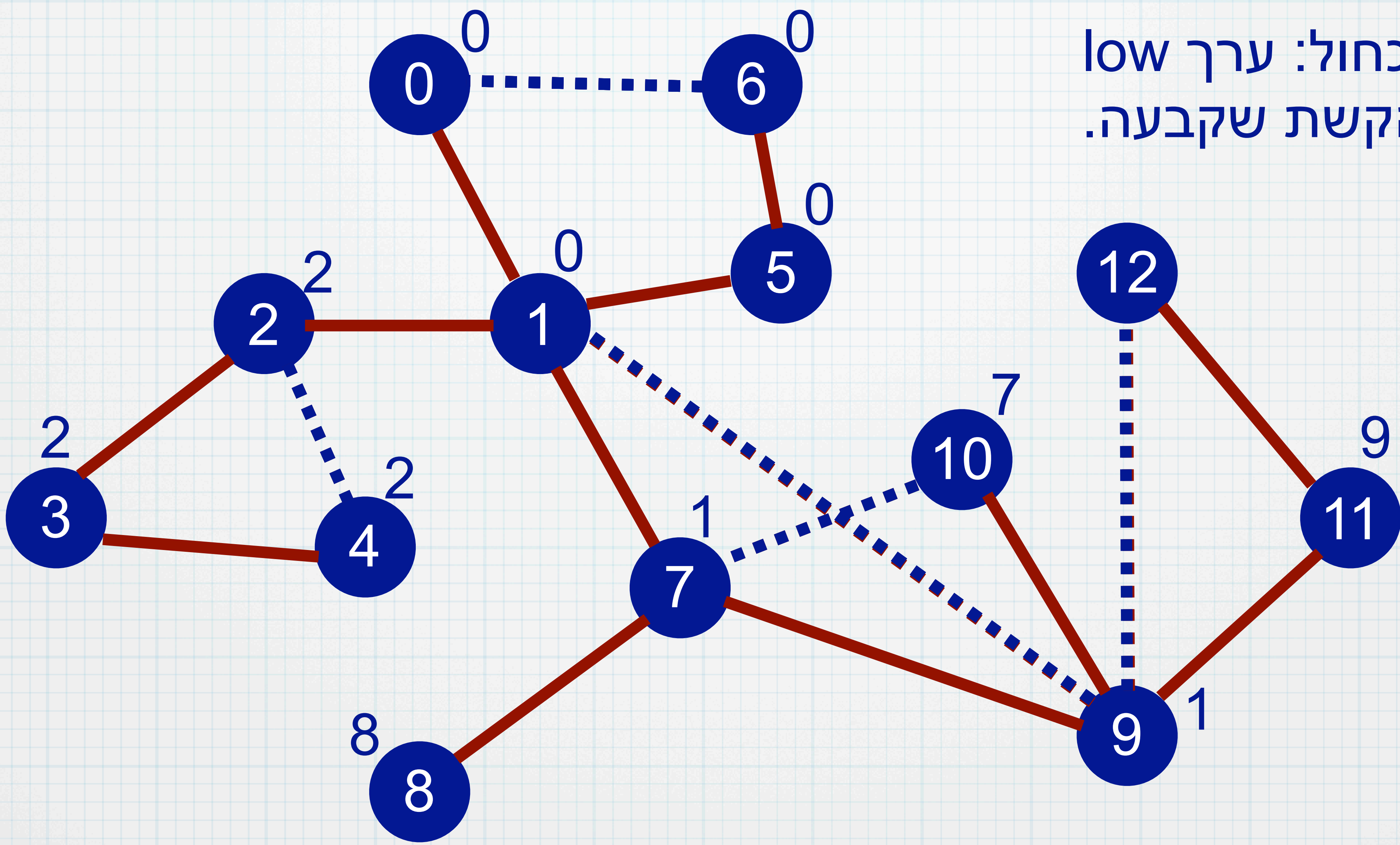
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



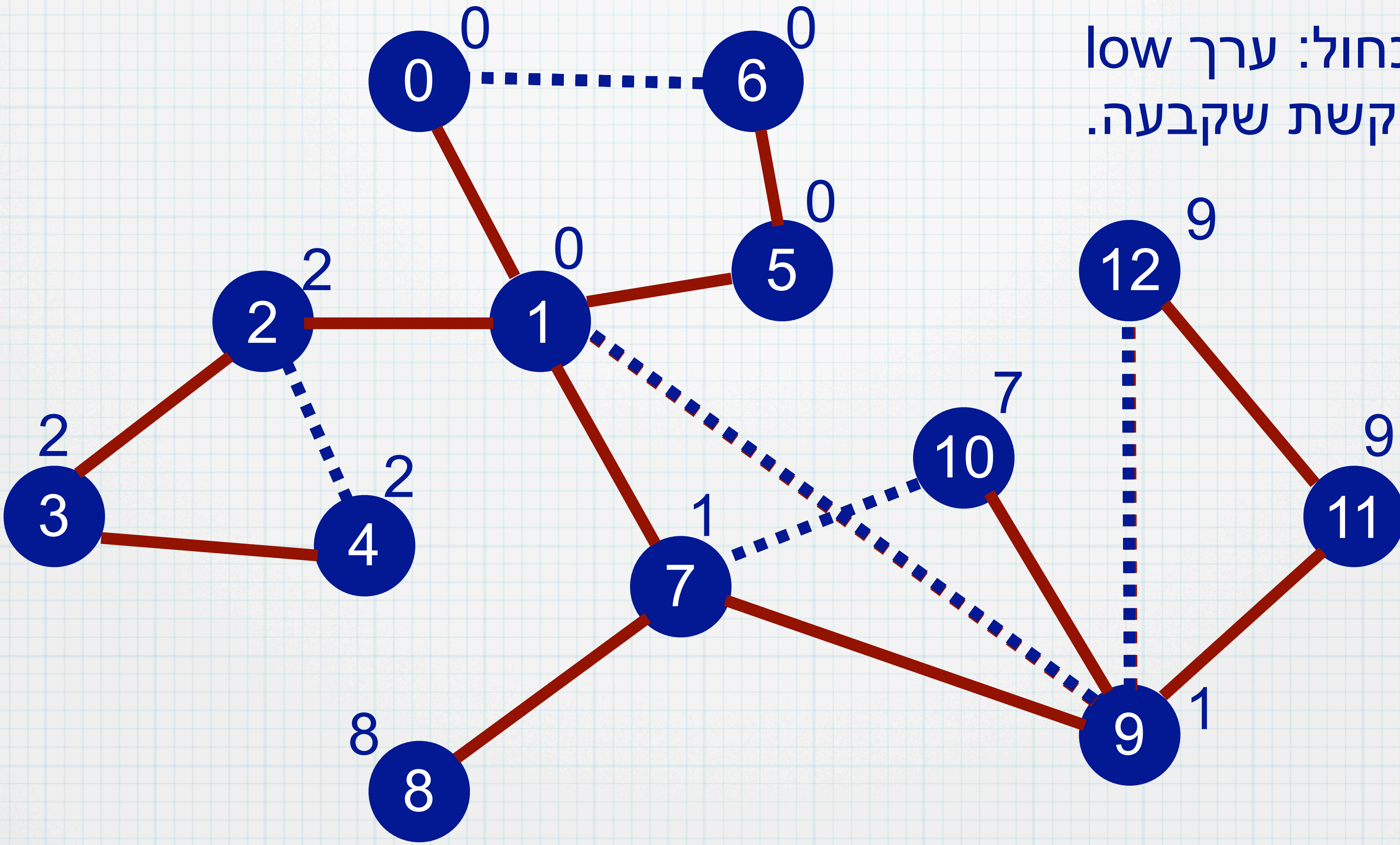
הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



הדגמה

בכחול: ערך low
והקשת שקבעה.



חישוב low עבור צומת שאיננו השורש

```
DFS_low(G,x)
  low[x] ← pre[x] ← pre_c++
  for each y ∈ Adj[x] do
    if pre[y] = ∞ then
      DFS_low(G,y)
      if low[y] < low[x] then low[x] ← low[y]
      if low[y] ≥ pre[x] then art[x] ← "yes"
    else if pre[y] < low[x] then
      low[x] ← pre[y]
    end if
  end for
end DFS_low
```

במקרה זה y ילד של x

מתת-העץ המושרש ב-y יש קשת אחורה לאב קדמון של low[x] הנוכחי

במקרה זה y אב קדמון של x

סימון הרכיבים האי-פריקים

```
for each y ∈ Adj[x] do
  if {x,y} לא סרקנו עדיין את then push({x,y},stack)
  if pre[y] = ∞ then
    ...
    if low[y] ≥ pre[x] then
      art[x] ← "yes"
      bcc_c++
      repeat
        e ← pop(stack)
        bcc[e] ← bcc_c
      while e ≠ {x,y}
    end if
    ...
  end if
end for
```

נחזיק מחסנית של קשתות

זה מונה של מספר הרכיבים

את הלולאה של שליפת קשתות מהמחסנית צריך לבצע גם עבור כל ילד y של השורש s.

שימו לב: ייתכן של-x יש מספר ילדים שיזהו אותו כצומת הפרדה, ואז כל ילד כזה יגרום לשליפת רכיב אי-פריק.

סיבוכיות

הסריקה לעומק לוקחת $O(|V|+|E|)$ זמן.
השינויים לחישוב low לא משנים את הסיבוכיות.
לכל קשת מבצעים $O(1)$ פעולות מחסנית.

סה"כ סיבוכיות הזמן: $O(|V|+|E|)$

סיבוכיות המקום: $O(|V|+|E|)$

תרגיל בית

הוכיחו שבכל פעם שמבצעים את לולאת repeat אכן קבוצת הקשתות הנשלפת מהמחסנית היא רכיב אי-פריק.

רכיבים קשירים היטב

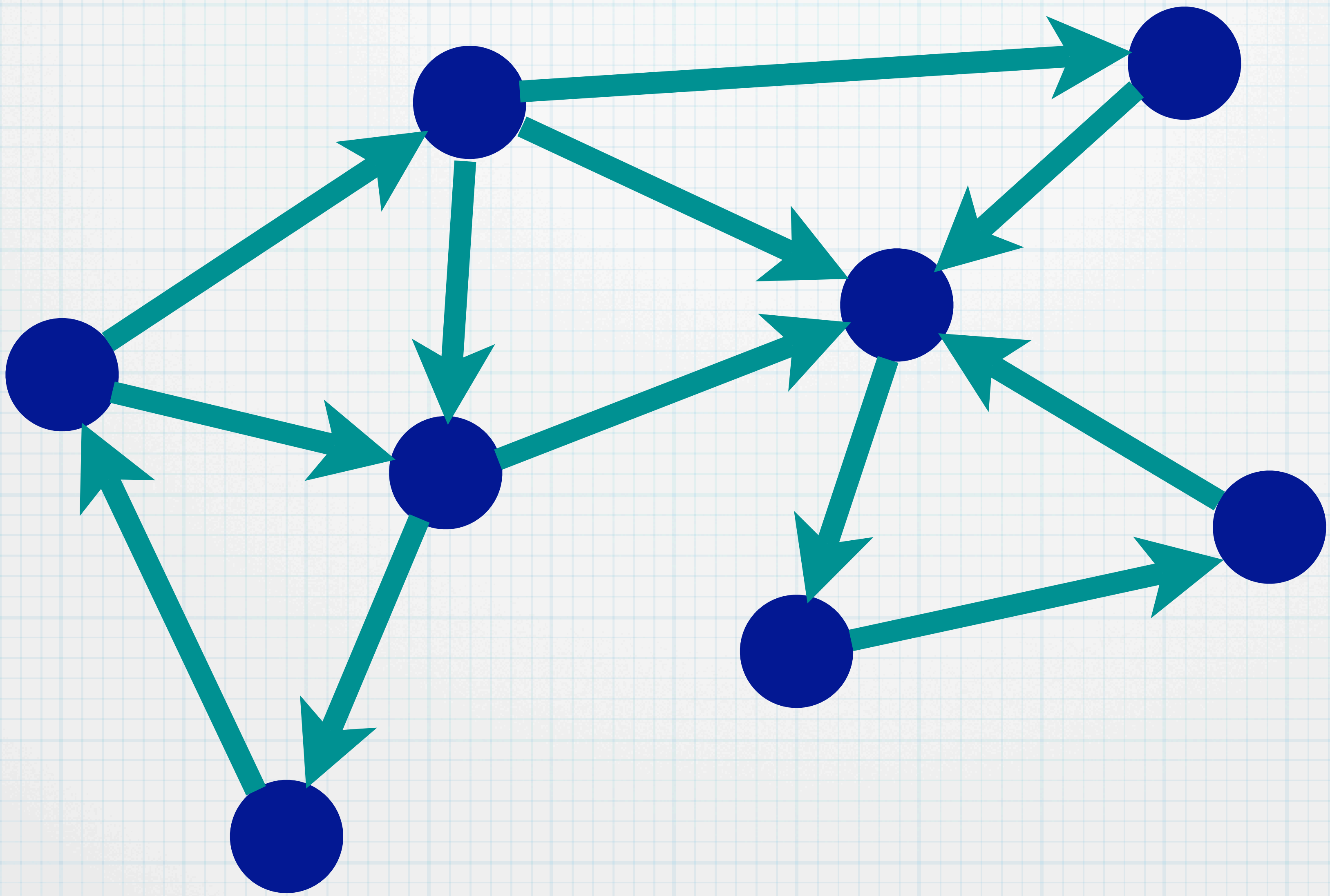
<u>הגדרה</u>: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$.
יהי $\sim$ יחס שקילות על V, שמקיימים $y \sim x$ אםם יש
מסלול מכוון מ-x ל-y וגם מ-y ל-x.
תתי הגרף הנפרשים על ידי מחלקות השקילות של $\sim$
נקראים הרכיבים הקשירים היטב של G.

שימו לב: תיתכנה קשתות של G שאין כלולות בשום
רכיב קשיר היטב.

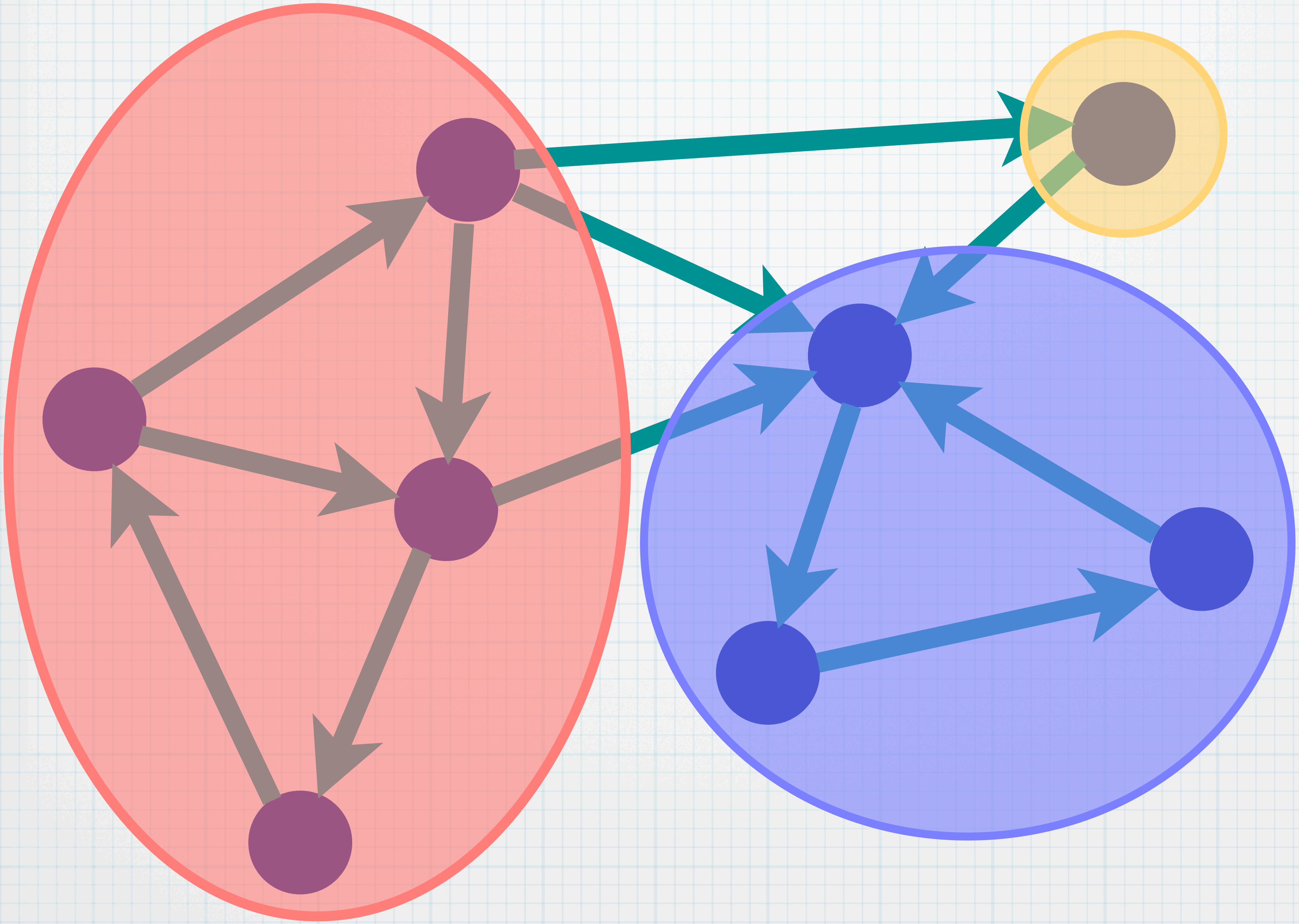
<u>הקלט</u>: גרף מכוון G.

<u>הפלט</u>: חלוקה של G לרכיבים קשירים היטב.

הדגמה



הדגמה



אלגוריתם Kosaraju-Sharir

```
KS(G)
  for each x ∈ V do  post[x]←∞, from[x]←nil, scc[x]←∞
  post_c ← 0, scc_c ← 0
  for each x ∈ V do
    if post[x] = ∞ then DFS(G,x)
  end for
  sort(V,-post)
  for each x ∈ V do
    if scc[x] = ∞ then
      DFS_scc(G^T,x)
      scc_c++
    end if
  end for
end KS
```

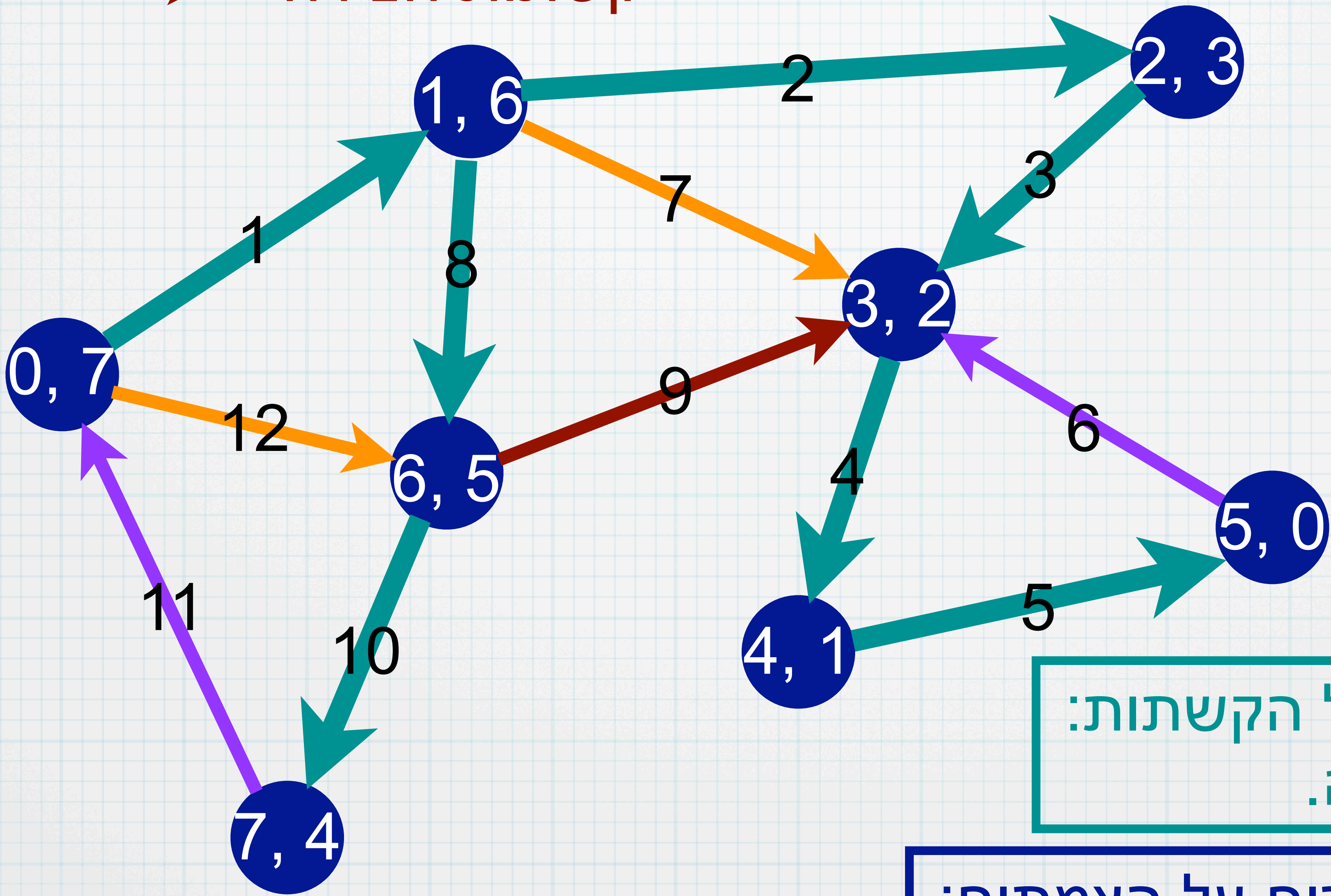
הערך scc[x] יציין את מספר הרכיב אליו שייך x.

נמיין את V בסדר post יורד

הגרף G^T מתקבל מ-G על ידי הפיכת כל הקשתות.

הדגמה: תוצאות DFS

קשתות עץ
קשתות קדימה
קשתות אחורה
קשתות הצידה



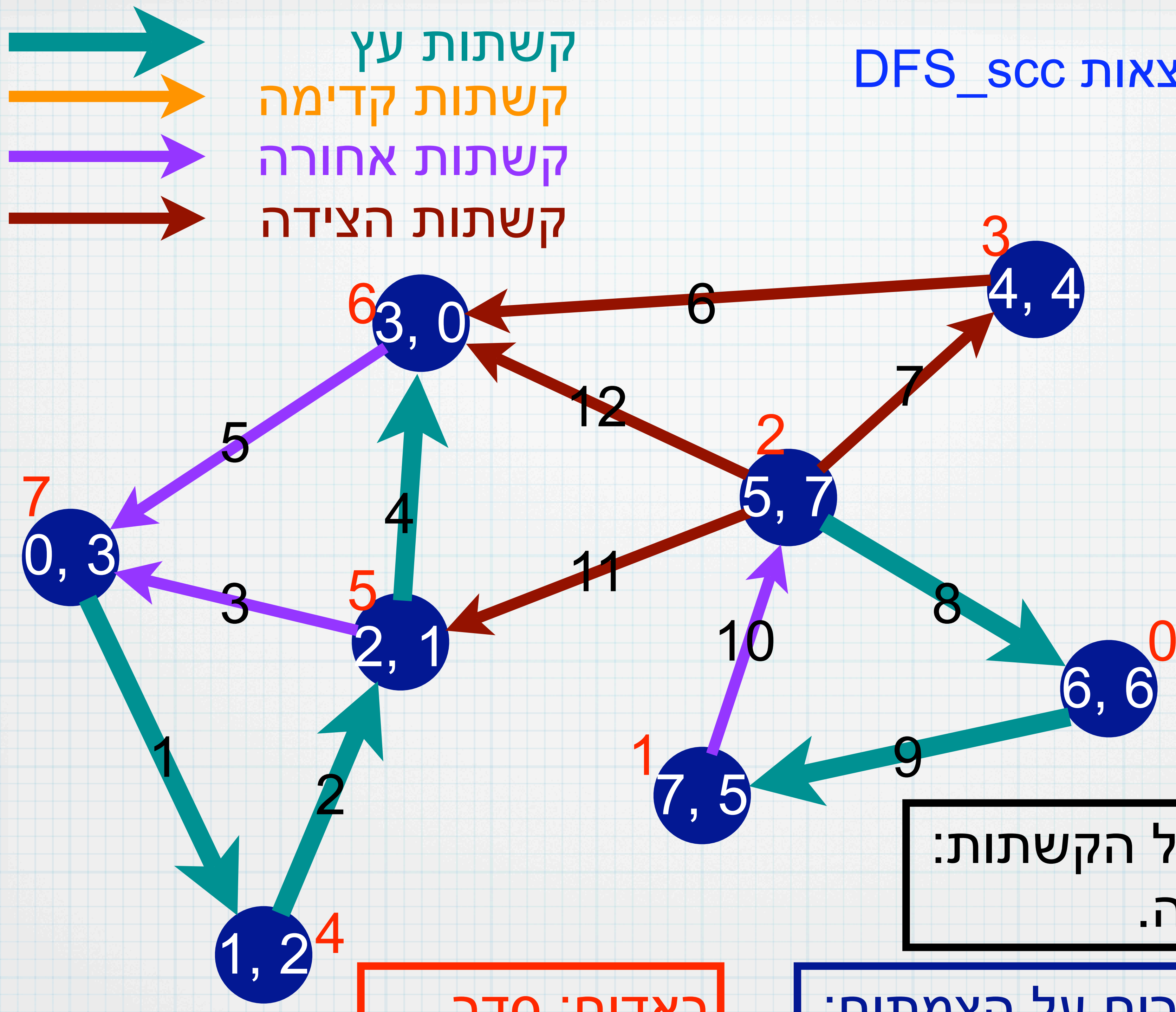
המספרים על הקשתות:
סדר הסריקה.

זוגות המספרים על הצמתים:
סדר הגילוי וסדר החזרה.

איסוף רכיב קשיר היטב

```
DFS_scc(G,x)
  scc[x] ← scc_c
  for each y ∈ Adj[x] do
    if scc[y] = ∞ then DFS_scc(G,y)
  end for
end DFS_scc
```

הדגמה: תוצאות DFS_scc



המספרים על הקשתות: סדר הסריקה.

באדום: סדר החזרה ב-DFS

זוגות המספרים על הצמתים: סדר הגילוי וסדר החזרה.

הוכחת נכונות

נתבונן בלולאה של הרצת DFS על G.

אבחנה: הגרף הנפרש על ידי קשתות העץ הוא אוסף של עצים מכוונים זרים הפורשים יחד את V(G). (כל קריאה מהפרוצדורה KS ל-DFS(G,x) מייצרת עץ מושרש ב-x.)

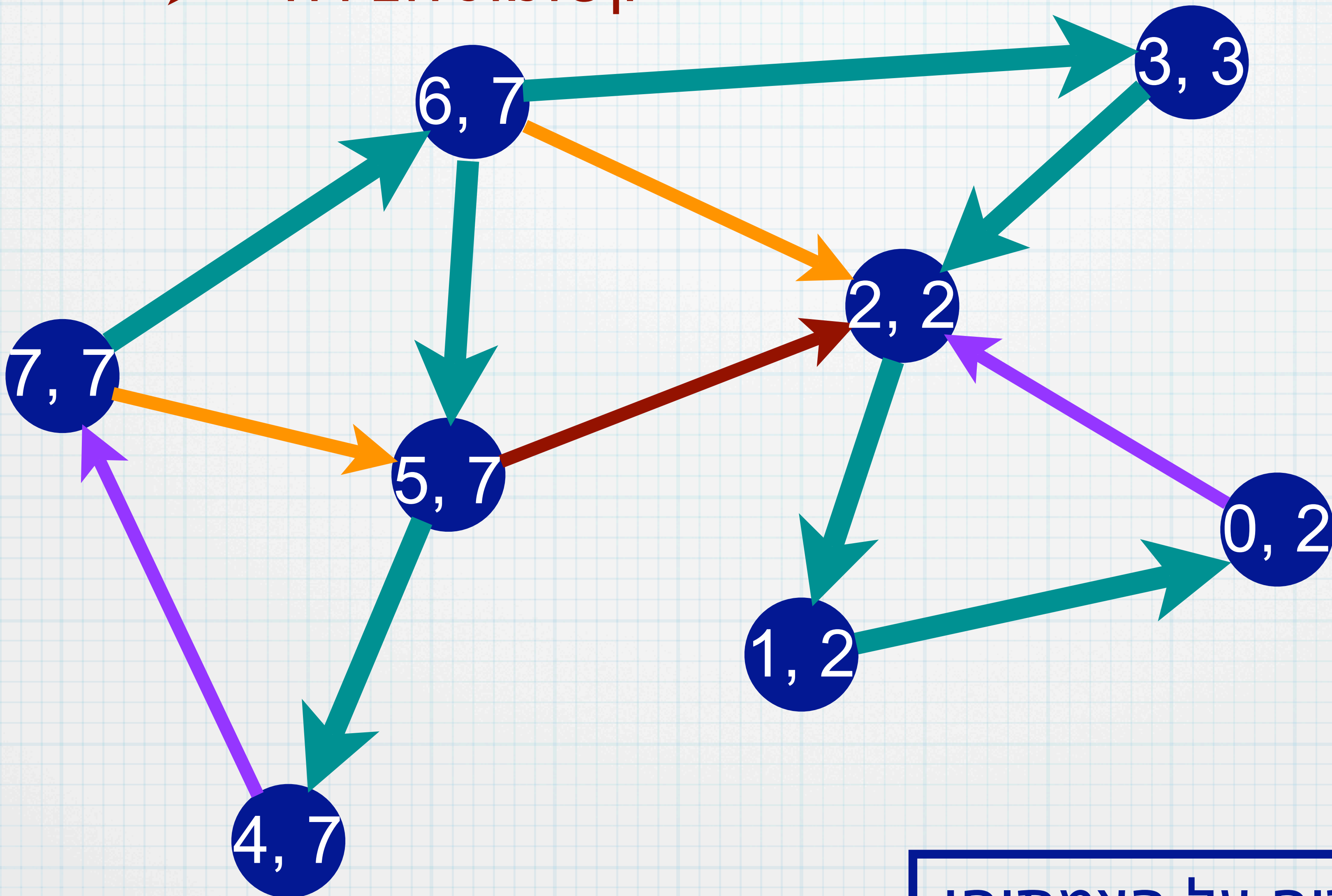
הגדרה: לכל $x \in V$ נסמן ב-$\varphi(x)$ את הצומת בעל ערך post המירבי מבין כל הצמתים הנגישים מ-x ב-G.

שימו לב: $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ (מדוע?)

טענה: ב-G יש מסלול מכוון מ-$\varphi(x)$ ל-x ולכן x ו-$\varphi(x)$ באותו רכיב קשיר היטב.

הדגמה: חישוב φ

קשתות עץ
קשתות קדימה
קשתות אחורה
קשתות הצידה



זוגות המספרים על הצמתים:
סדר החזרה וערך φ.

הוכחת נכונות (המשך)

הוכחה: אם $\varphi(x) = x$ אז בוודאי הטענה נכונה. אם חזרנו כבר מ-$\varphi(x)$ לפני שגילינו את x אז $post[x] < post[\varphi(x)]$, וזו סתירה להגדרת $\varphi(x)$.

נניח שגילינו את x לפני שגילינו את $\varphi(x)$. אזי יהי z הצומת האחרון במסלול מ-x ל-$\varphi(x)$ שנתגלה לפני או בזמן גילוי x. יש כזה כי x כזה. כל הצמתים בקטע המסלול מ-z ל-$\varphi(x)$ עדיין לא נתגלו בזמן גילוי z. לכן כולם, בפרט $\varphi(x)$ יתגלו בין גילוי z לחזרה מ-z. לכן $post[z] < post[\varphi(x)]$ וזו סתירה להגדרה של $\varphi(x)$, כי z נגיש מ-x.

לכן, האפשרות היחידה היא ש-x נתגלה בין גילוי $\varphi(x)$ לבין החזרה מ-$\varphi(x)$, כלומר, x נמצא בתת-העץ המושרש ב-$\varphi(x)$, ולכן יש מסלול מכוון מ-$\varphi(x)$ ל-x. $\therefore$

הוכחת נכונות (המשך)

מסקנה: שני צמתים x,y נמצאים באותו רכיב קשיר היטב אמם $\varphi(x) = \varphi(y)$.

הוכחה: כל הצמתים באותו רכיב נגישים זה מזה, ולכן לכולם אותו ערך φ. מצד שני, x ו-$\varphi(x)$ באותו רכיב וכך גם y ו-$\varphi(y)$. לכן, אם $\varphi(x) = \varphi(y)$, אז x,y באותו רכיב.

הוכחת נכונות (המשך)

עכשיו נתבונן בקריאה ל-$DFS\_scc(G^T,x)$

הקריאות הקודמות (אם היו) ל-DFS_scc לא גילו את x, ולכן ב-G^T אין אף מסלול מצומת שנתגלה בקריאות הקודמות ל-x, כלומר ב-G אין אף מסלול מ-x לצומת שנתגלה בקריאות הקודמות. אבל, קבוצת הצמתים שנתגלתה בקריאות הללו כוללת את כל הצמתים עם ערך post מ-DFS הגדול מ-post[x] ולכן $\varphi(x) = x$.

הצמתים המתגלים בקריאה ל-$DFS\_scc(G^T,x)$ הם בדיוק הצמתים שנגישים ב-G^T מ-x. לכל צומת כזה y יש ב-G מסלול מ-y ל-x. אבל x בעל ערך post המירבי מבין כל הצמתים שנותרו, כך ש-$\varphi(y) = x$. כלומר, הקריאה ל-$DFS\_scc(G^T,x)$ מסמנת את הרכיב הקשיר היטב של x. $\therefore$