© Itai April 28, 1996

סיבוכיות וסימון O

הגדרה O גדול:

יהיו f,g פונקציות חיוביות ומונוטוניות לא-יורדות.

$$f(n)=O(g(n))$$

אם קיימים קבועים c,n_0 כך שעבור $n_0 \le n$

$f(n) \le cg(n)$.

הגדרה שקולה:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

למה $\limsup$ ולא $\lim$?

דוגמאות:

פולינומיאלי

קונסטנטה $f(n)=10^6=O(1)$

ליניארי $f(n)=n+27=O(n)$

$f(n)=8+15n+9n\log_2 n=O(n\log_2 n)$

ריבועי $f(n)=n\log_2 n+3n^2=O(n^2)$

אכספוננציאלי

$f(n)=c^n \qquad (c>1)$

האם

$f(n)=3^n=O(2^n)$

$f(n)=2^n=O(n^k)$ (k קבוע)

לוגריתמי

$f(n)=\log_2 n=O(\log_3 n)$

$f(n)=\log n=O(n^\varepsilon)$ לכל $0<\varepsilon$

$f(n)=\log n \ne O(\log\log n)$

סיבוכיות זמן -
מספר הצעדים כפונקציה של גודל הקלט.

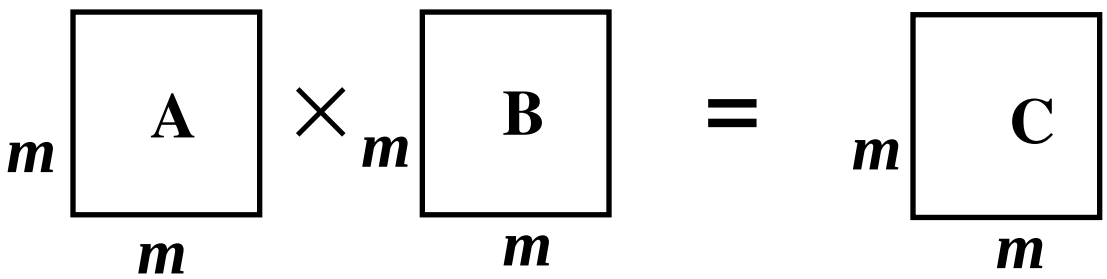
בדרך-כלל נמדד בסימון O גדול.

דוגמא 1: סכום אברי וקטור

```
sum = 0;
for(i=0; i<n; i++)
   sum += a[i];
```

$$t(n) = O(n)$$

דוגמא 2: כפל מטריצות ריבועיות $m \times m$



$$m = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \Leftarrow \quad n = 2m^2$$ **גודל הקלט**

$$t(n) = O\left(m^3\right) = O\left(\frac{n^{3/2}}{2^{3/2}}\right) = O\left(n^{3/2}\right)$$

קבוע

דוגמא 3

בדיקת ראשוניות

```
int is_prime(int p){
   int i;
   if(p == 2)
      return 1;
   for(i=2; i*i ≤ p; i++){
      if((p%i) == 0)
         return 0;
   }
   return 1;
}
```

גודל הקלט = מספר הביטים של p

כלומר, $n = \log_2 p$

סיבוכיות הזמן

$$t(n) \le C\sqrt{p} = C\sqrt{2^n} = O\left(2^{n/2}\right)$$

זהו המקרה הגרוע, מתי יקרה?

דוגמא 4

חיפוש בינארי על מערך בגודל n

$$t(n) = C + t\left(\frac{n}{2}\right)$$

משוואת הפרשים

$$= C + C + t\left(\frac{n}{4}\right) = \cdots = \underbrace{C + C + \ldots C}_{i} + t\left(\frac{n}{2^i}\right)$$

$$= \cdots = \underbrace{C + C + \ldots C}_{\log n} + t\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right)$$

$$= C\log_2 n + t(1) = O(\log n).$$

דוגמא 5

```
S = 0;
for(i=1; i<n; i++)
   for(j=0; j<n; j += i)
      S++;
```

תמיד מתקיים $t(n) = S$.

אנליזה גסה: שתי לולאות מקוננות

החיצונית $n-1$

הפנימית n

סה"כ $t(n) = n(n-1) = O(n^2)$

אנליזה עדינה:

כאשר $i=1$ **לולאה פנימית זמן** n

$i=2$ **זמן** $n/2$

$i=3$ **זמן** $n/3$

$\bullet\ \bullet\ \bullet$

$i=n$ **זמן** $1 = n/n$

סה"כ

$$t(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \ldots + 1$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = nH_n$$

כאשר H_n **הוא המספר ההרמוני ה-**n **:**

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(קבוע אוילר $\gamma = 0.57\ldots$)

ולכן

$$t(n) = O(n \log n)$$

סימונים נוספים

1. Ω (אומגה גדול)

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

אם

$$g(n) = O(f(n))$$

2. θ (טתה):

$$f(n) = \theta(g(n))$$

אם גם

$$f(n) = O(g(n))$$

וגם

$$g(n) = O(f(n))$$

כלומר, קיימים n_0, C_1, C_2 **, כך שעבור** $n_0 \le n$ **:**

$$C_1 g(n) \le f(n) \le C_2 g(n)$$

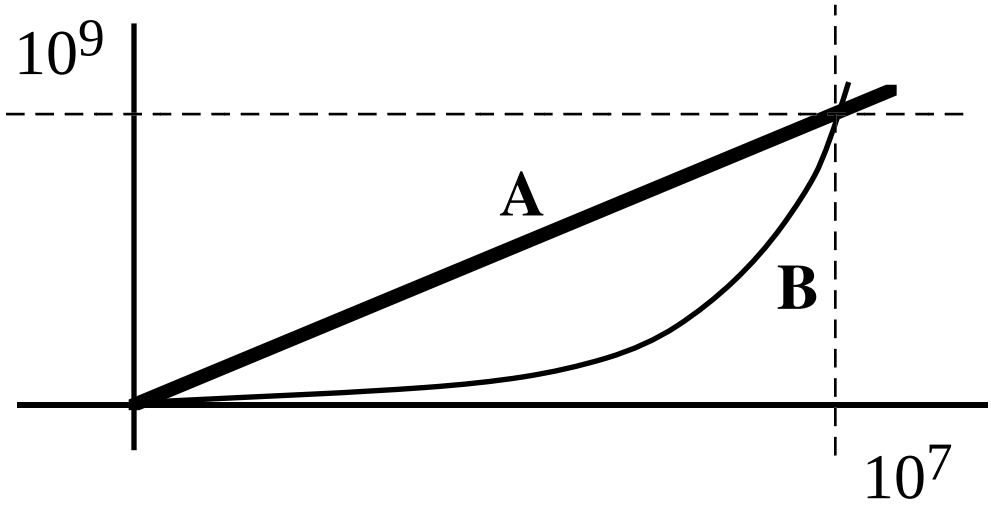
3. *o* קטן:

$$f(n) = \boldsymbol{o}(g(n))$$

אם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

מגבלות הסימון



נניח אלג' A $t_A(n) = 100\ n$

אלג' B $t_B(n) = 5\ n \log_2 n$

מתי $t_B(n) \geq t_A(n)$ **?**

n						
	1	2	4	5	10^6	10^7
A	100	200	400	800	10^8	10^9
B	0	5	40	120	$9.9\ 10^7$	$1.16\ 10^9$

כלומר, עבור $n \leq 10^6$ **אלג' B יעיל יותר.**

אותה התופעה קורית כאשר

$t_B(n) = 5n^2, \quad t_A(n) = 100n \log n$

אבל אז A יעיל יותר כבר עבור n=145.

מסקנה: יש להתחשב גם בקונסטנטות.