תרגיל כיתה מס' 4

פונקציות מיתוג, מערכת פעולות שלמה

הגדרה:

פונקציה לוגית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, היא פונקציה המתאימה ערך (*1* או *0*) לכל אחד מ- 2^n הצרופים של המשתנים שלה. אם הפונקציה נתונה ע"י ביטוי לוגי, הערך שלה מתקבל ע"י הצבת כל הערכים האפשריים של המשתנים. יש לשים לב שעבור n משתנים ישנן סה"כ 2^{2^n} פונקציות שונות.

ניתן להגדיר פונקציה לוגית בארבע דרכים שונות לפחות:

1. טבלת אמת
2. סכום מכפלות
3. מכפלת סכומים
4. סכימת מעגל לוגי

1. הגדרת פ' לוגית ע"י טבלת אמת:

להלן טבלה המראה את 256 הפונקציות השונות שקיימות עבור שלושה משתני כניסה:

xyz	f_0	f_1	f_2		f_{43}		f_{255}
000	0	0	0		0		1
001	0	0	0		0		1
010	0	0	0		1		1
011	0	0	0	…	0	…	1
100	0	0	0		1		1
101	0	0	0		0		1
110	0	0	1		1		1
111	0	1	0		1		1
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
	0	xyz	xyz'		$x'yz'+xy'z'+xyz'+xyz$		1

2. <u>הגדרת הפונקציה ע"י סכום מכפלות</u>:

xyz	$f_{43}(x,y,z)$	סכום מכפלות minterm	מכפלת סכומים maxterm
000	0		$x+y+z$
001	0		$x+y+z'$
010	1	$x'yz'$	
011	0		$x+y'+z'$
100	1	$xy'z'$	
101	0		$x'+y+z'$
110	1	xyz'	
111	1	xyz	

בטבלת האמת של הפונקציה נעבור על כל השורות שבהן יש 1 ביציאה.
עבור כל שורה כזאת נחבר לפונקציה שלנו מכפלה של כל משתני הכניסה או היפוכם *(minterm)* בהתאם לערכי הכניסה. אם משתנה מסוים, למשל x, מקבל 0 באותה שורה אז במכפלה שנוסיף הוא יופיע כ- x' ואם הוא מקבל 1 אז הוא יופיע כ-x.
לאחר תהליך זה סכום המכפלות של f_{43} הוא:

$$f_{43}\left(x,y,z\right)=x'yz'+xy'z'+\underbrace{xyz'}_{\text{minterm}}+\underbrace{xyz}_{\text{minterm}}$$

2. <u>הגדרת הפונקציה ע"י מכפלת סכומים</u>:

בטבלת האמת של הפונקציה נעבור על כל השורות שבהן יש 0 ביציאה.
עבור כל שורה כזאת נכפיל את הפונקציה שלנו בסכום של כל משתני הכניסה או היפוכם *(maxterm)* בהתאם לערכי הכניסה. אם משתנה מסוים, למשל x, מקבל 1 באותה שורה אז בסכום שנוסיף הוא יופיע כ- x' ואם הוא מקבל 0 אז הוא יופיע כ-x.
לאחר תהליך זה מכפלת הסכומים של f_{43} הוא:

$$f_{43}\left(x,y,z\right)=(x+y+z)\cdot(x+y+z')\cdot\underbrace{(x+y'+z')}_{\text{maxterm}}\cdot\underbrace{(x'+y+z')}_{\text{maxterm}}$$

צורות רישום נוספות:

ניתן לייצג את סכום המכפלות ואת מכפלת הסכומים ע"י רשימת *minterms* או *maxterms* כסכום או מכפלה של ערכים עשרוניים השווים למספרים הבינאריים המתאימים לצירופי המשתנים הרצויים. למשל עבור f_{43} מהדוגמא :

$$f_{43}(x,y,z)=\sum(2,4,6,7)=\prod(0,1,3,5)$$

מיקום האחדים ב- f
סכום ה- *minterms*

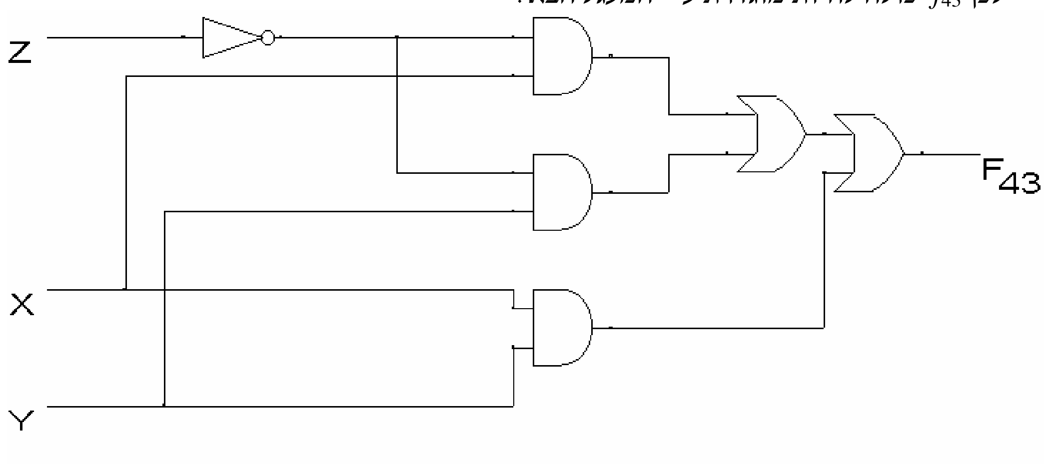
מיקום האפסים ב- f
מכפלת ה- *maxterms*

3. הגדרת הפונקציה ע"י מעגל לוגי:

לדוגמא:
לאחר צמצום:

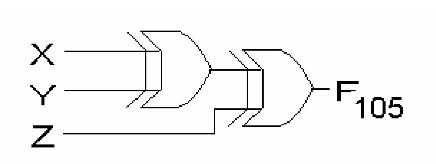
$$f_{43}(x,y,z)=xz'+xy+yz'$$

לכן f_{43} יכולה להיות מוגדרת ע"י המעגל הבא:



דוגמא נוספת:

$$f_{105}=XOR(x,y,z)=XOR(XOR(x,y),z)=x'yz'+xy'z'+xyz+x'y'z$$



<u>הפיכת פונקציה הנתונה ע"י ביטוי, לצורת סכום מכפלות קנוני</u>:

1. בודקים כל איבר. לכל משתנה x שאינו מופיע, כופלים את האיבר ב- $(x+x')$.
2. מבצעים את כל המכפלות ומבטלים איברים מיותרים.

<u>דוגמא</u>:

$$
\begin{aligned}
& f(x,y,z) = x' + yz' \\
& = x'(y+y')(z+z') + yz'(x+x') \\
& = x'yz + \underline{x'yz'} + x'y'z + x'y'z' + xyz' + \underline{x'yz'} \\
& = x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz' \\
& = \sum(0,1,2,3,6) = \prod(4,5,7)
\end{aligned}
$$

פעולת *XOR*

A	B	$A\oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\Rightarrow A\oplus B = A'B + AB' = \sum(1,2)$$

פעולת *XOR* זהה למעשה לפעולת חיבור מודולו 2.

בעזרת טבלת אמת או אלגברית ניתן להוכיח ש :

$$\begin{aligned}&A\oplus A = 0\\&A\oplus 0 = A\\&A\oplus 1 = A'\\&A\oplus B = B\oplus A\\&(A\oplus B)\oplus C = A\oplus (B\oplus C) = A\oplus B\oplus C\end{aligned}$$

ראה "נוסחאות" נוספות בחוברת ההרצאות.

שימו לב שבעזרת $\oplus$ ניתן להעביר בין אגפים :

$$A=B \Rightarrow A\oplus B=B\oplus B \Rightarrow A\oplus B=0$$

דוגמאות :

הוכח או הפרך (הבא דוגמא נגדית) :

1. *if* $A\oplus C=B\oplus C$ *then* $A=B$

   Proof:

$$A\oplus C=B\oplus C$$

$$A\oplus C\oplus C=B\oplus C\oplus C \Rightarrow A\oplus 0=B\oplus 0 \Rightarrow A=B$$

2. $A\oplus B=A'\oplus B'$

   Proof:

$$A'\oplus B'=A\oplus 1\oplus 1\oplus B=A\oplus 0\oplus B=A\oplus B$$

דרך אחרת (הצבה בסכום המכפלות) :

$$A'\oplus B'=(A')'B'+(B')'A'=AB'+A'B=A\oplus B$$

3. *If* $A\oplus B\oplus C=D$ *then*

   a. $A\oplus B=C\oplus D$

   b. $A=B\oplus C\oplus D$

   Proof:

a. $A\oplus B\oplus C=D \Rightarrow A\oplus B\oplus C\oplus C=D\oplus C \Rightarrow A\oplus B\oplus 0=D\oplus C \Rightarrow A\oplus B=C\oplus D$

b. $A\oplus B=C\oplus D \Rightarrow A\oplus B\oplus B=C\oplus D\oplus B \Rightarrow A=B\oplus C\oplus D$

מערכת פעולות שלמה

הגדרה: קבוצת פעולות נקראת שלמה אם ניתן להציג בעזרתה את כל הפונקציות הלוגיות.

$\{\cdot, +, '\}$

היא מערכת פעולות שלמה. ע״י חוקי דה-מורגן ניתן להראות כי גם הקבוצות הבאות הן מערכות פעולות שלמות:

$\{\cdot, '\},\ \{+, '\}$

למשל ניקח

$\{\cdot, '\}$

אזי ניתן לבצע + ע״י

$$A+B=(A'\cdot B')'$$

בהרצאות נלמד גם כי הפעולות NOR , $NAND$ המוגדרות ע״י:

$$NAND(x,y)=(x\cdot y)'$$

$$NOR(x,y)=(x+y)'$$

הינן מערכות פעולות שלמות.

כלל אצבע:

כדי לשלול שלמות של פונקציה נציב משתנה אחד בכל הכניסות של הפונקציה. אם התוצאה אינה היפוכו של המשתנה אזי בהכרח הפונקציה אינה שלמה.

תרגילים:

1. האם הפעולה $f(a,b,c)=a'+bc'$ היא מערכת פעולות שלמה?

תשובה:

ניתן לממש פעולת NOT: $f(a,a,a)=a'+aa'=a'+0=a'$

בעזרת ה-NOT ממשנו את הקבוע '1': $f(a,a,a')=a'+aa=a'+a=1$

וע"י שימוש בשניהם מימשנו פעולת AND: $f(1,b,a')=0+ba=a\cdot b$

כלומר הפעולה היא שלמה.

2. האם הפעולה $f(a,b,c)=a'+bc$ היא מערכת פעולות שלמה?

תשובה:

שימוש בכלל האצבע: $f(a,a,a)=a'+aa=a'+a=1(\neq a')$

לא התקבל ההיפוך של המשתנה $\Leftarrow$ המערכת אינה שלמה.

ניתן לראות כי אם היה נתון לנו הקבוע '0' ניתן היה לקבל:

$$f(a,0,0)=a'+0=a'$$

$$f(0',a,b)=f(1,a,b)=0+ab=a\cdot b$$

כלומר הפעולה תהיה שלמה רק אם נתון הערך הלוגי '0'.

הגדרה: מערכת פעולות תיקרא חצי שלמה אם הינה שלמה רק בתוספת קבועים (0 או 1 או שניהם).

3. (שאלה מבחינה)

נתון רכיב צירופי בעל 3 כניסות ויציאה אחת המממש את הפונקציה f:

$$f(x,y,z)=xy+z$$

כמה רכיבים כאלה צריך בכדי לממש את הפונקציה g?

$$g(a,b,c)=c'(c'+b)(a'+b)$$

תשובות אפשריות:

א) 4 *ג) 2*

ב) 3 *ד) לא ניתן לממש את g ע"י f.*

פתרון:

יש לשים לב ש- $f(a,a,a)=aa+a=a$

כלומר הפונקציה אינה מהווה מערכת פעולות שלמה.

ניתן לראות שגם בתוספת קבועים לא ניתן לממש NOT ולכן לא ניתן לממש את g ע"י f בכלל.

4. (שאלה מבחינה)

נתונה פונקצית המיתוג $f(x,y)=x'+y$.

רק אחד מן המשפטים הבאים הוא נכון. איזה מהם?

א) $\{f\}$ מערכת שלמה.

ב) $\{f\}$ איננה מערכת שלמה, אבל $\{f,0\}$ היא מערכת שלמה.

ג) $\{f\}$ איננה מערכת שלמה, אבל $\{f,1\}$ היא מערכת שלמה.

ד) $\{f,0\}$ וגם $\{f,1\}$ אינן מערכות שלמות, אבל $\{f,0,1\}$ היא מערכת שלמה.

פתרון:

$$f(a,a)=a'+a=1$$

לכן f אינה שלמה ו-א' לא נכון.

$$f(a,0)=a'+0=a'$$

$$f(a',b)=(a')'+b=a+b$$

כלומר $\{f,0\}$ היא שלמה ולכן תשובה ב' היא כנראה הנכונה, וזה גם פוסל את תשובה ד'.

בדיקה אחרונה לגבי תשובה ג':

$$f(a,1)=a'+1=1$$

$$f(1,a)=0+a=a$$

אכן ניתן לראות כי $\{f,1\}$ אינה מערכת שלמה.

$\Leftarrow$ מבין ארבעת המשפטים, משפט ב' הוא היחיד הנכון.