מערכות ספרתיות

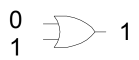
פרק 1 : אלגברת מיתוג (Switching Algebra)

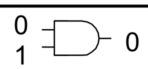
הגדרה

- *אלגברת מיתוג* : הקבוצה $\{1,0\}$, עליה מוגדרות שתי פעולות בינריות (הפועלות על שני אופרנדים) ופעולה אונרית (הפועלת על אופרנד אחד) המוגדרות כלהלן :

אלגברת מיתוג

OR	AND	NOT
0+0=0	0·0=0	0`=1
0+1=1	0·1=0	1`=0
1+0=1	1·0=0	
1+1=1	1·1=1	





דומה לפעולות חיתוך, איחוד והשלמה בתורת הקבוצות

3

משתני וקבועי מיתוג

- קבועי מיתוג:
  כל אחד משני הערכים '0' ו- '1'
- משתנה מיתוג:
  משתנה שיכול לקבל שני ערכים '0' ו- '1'.

4

ביטוי מיתוג

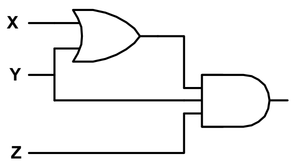
ביטוי-מיתוג (Switching expression) : צירוף סופי של משתני מיתוג (למשל *x,y,z*), קבועי מיתוג (0, 1) ופעולות מיתוג המוגדר באופן רקורסיבי כך :

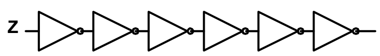
- כל משתנה-מיתוג או קבוע-מיתוג הינו ביטוי מיתוג.
- אם T_1 ו- T_2 הינם ביטויי מיתוג, כך גם T_1+T_2, $T_1•T_2$ ו- $(T_1)`$

צירוף סימנים <u>שאינו</u> מתקבל כך, <u>איננו</u> ביטוי מיתוג

ביטוי מיתוג - דוגמות

- (x+y)zy
- z``````
- x++y – אינו ביטוי מיתוג





סדר ביצוע הפעולות הבוליאניות

- לפי הסוגריים
- בהעדר הסוגריים:
  - קדימות ראשונה: שלילה (NOT)
  - קדימות שניה: AND
  - קדימות שלישית: OR

7

ערך (אמת) של בטוי מיתוג תחת השמה

- **<u>הגדרה</u>**

ערך (האמת) של ביטוי מיתוג T תחת השמת ערכי אמת הוא הערך שמקבל הביטוי כאשר מציבים לכל משתנה מיתוג בו את ערך האמת שלו בהשמה.

- <u>דוגמה:</u>

חשב את הביטוי

$$A`+C+B`C+AC`$$

אם נתון: $A=0, B=0, C=1$

8

דוגמה:

ביטוי	השמה	ערך
x	$x \leftarrow 0$	0
x	$x \leftarrow 1$	1
$x \bullet y$	$x \leftarrow 0$ $y \leftarrow 1$	0
$x \bullet y$	$x \leftarrow 1$ $y \leftarrow 1$	1

זהות מיתוג

- **יהיו T_1 ו- T_2 בטויי מיתוג. השיוון $T_1=T_2$ הינו זהות מיתוג אם תחת כל השמה מקבלים T_1 ו-T_2 ערכים שווים.**
- **דוגמאות:**

זהות	לא זהות
x=x	x=y
$x \bullet y=y \bullet x$	$x \bullet y=y+x$

- הוכחה ע״י בדיקה של כל צירוף אפשרי של המשתנים (אינדוקציה שלמה) – כתיבת ״טבלת האמת״

זהות מיתוג

- הערה: בזהות מיתוג ניתן להחליף כל משתנה בבטוי מיתוג. למשל:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(w+zq) \cdot y = y \cdot (w+zq)$$

11

זהויות – מיתוג בסיסיות

1. Idempotency

$$x+x=x$$

$$x \cdot x = x$$

הוכחה: באמצעות "אינדוקציה שלמה" (perfect induction) – מעבר על כל האפשרויות.
לפי טבלאות האמת של AND, OR:

$$0+0=0,\ 1+1=1$$

$$0 \cdot 0=0,\ 1 \cdot 1=1$$

12

2. ערכים אדישים ושולטים

$x+1=1$	1 שולט בחיבור
$x \cdot 0=0$	0 שולט בכפל
$x+0=x$	0 אדיש בחיבור
$x \cdot 1=x$	1 אדיש בכפל

3. <u>חילוף (קומוטטיביות)</u>

$$x+y=y+x$$

$$x \cdot y=y \cdot x$$

4. <u>קיבוץ (אסוציטיביות)</u>

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$$

5. <u>השלמה</u>

$$x+x`=1$$
$$x\bullet x`=0$$

6. <u>פילוג (דיסטריבוטיביות)</u>

$$x\,(y+z)=xy+xz$$
$$x+(y\bullet z)=(x+y)\bullet(x+z)$$

הוכחה: אינדוקציה שלמה

15

עקרון הדואליות

- בכל זהות עד כה, אם נחליף

$AND \leftrightarrow OR$

$1 \leftrightarrow 0$

$(1+A)(B+0)$

$(0\bullet A)+(B\bullet 1)$

- נקבל זהות (חדשה) <u>דואלית.</u>

עקרון הדואליות : אם מתקיים

P(x,y,…,0,1,AND,OR,NOT)= Q(x,y,…,0,1,AND,OR,NOT)

מתקיים גם

P(x,y,…,1,0,OR,AND,NOT)= Q(x,y,…,1,0,OR,AND,NOT)

עיקרון זה נובע מהסימטריה בין טבלאות האמת של AND ושל OR

<u>מסקנה</u> : מספיק להוכיח תכונה אחת מכל זוג, והתכונה השנייה נובעת מעיקרון הדואליות.

16

7. חוק "הבליעה"

$$x+xy=x$$

$$x(x+y)=x$$

הוכחה :

$$x+xy=x\bullet 1+xy=x(1+y)=x$$

$$x(x+y)=(x+0)\bullet(x+y)=x+0\bullet y=x$$

17

8. חוק הבליעה השני

$$x+x`y=x+y$$

$$x(x`+y)=xy$$

הוכחה :

$$x+x`y=x+xy+x`y=x+y(x+x`)=x+y$$

$$x(x`+y)=x(x+y)\ (x`+y)=x(y+xx`)=xy$$

18

9. חוק הקונסנזוס

$$xy+x'z+yz=xy+x`z$$

הוכחה:

$$xy+x'z+yz = xy+x'z+yz \bullet 1=$$
$$xy+x'z+yz(x+x')= xy+x'z+yzx+yzx`=$$
$$=xy+x'z$$

19

- דוגמה לפישוט ביטוי

$$x`y`z+yz+xz=z(x`y`+y+x)$$
$$=z(x`+y+x)$$
$$=z$$

20

- אין פעולות הופכיות לחיבור ולכפל (אסור לצמצם)!
למשל

$$A+B=A+C$$

אינו גורר

$$B=C$$

21

חוקי דה-מורגן (De Morgan)

- חוקים אלו מאפשרים טיפול במשלימים.

10. <u>היפוך עצמי (involution)</u>

$$(x`)`=x$$

11. **<u>חוקי דה-מורגן על OR, AND</u>**

$$(x+y)`=x`\cdot y`$$

$$(xy)`=x`+y`$$

22

חוקי דה-מורגן (De Morgan)

באופן כללי

$P(x,y,\ldots,0,1,AND,OR)` = P(x`,y`,\ldots,1,0,OR,AND)$

דוגמה:

$(x`+y+z)`=xy`z`$

דוגמה:

$(x+y)[x`(y`+z`)]`+x`y`+x`z`=$
$=(x+y)(x+yz)+x`y`+x`z`=$
$=x+xy+xyz+yz+x`y`+x`z`=$
$=x+y`+z`+y=1$

דוגמה:

$(x+y`z)` =$

$= (x+(y`z))`$

$= x`(y+z`)$

סדר הפעולות חייב להישמר כמו במקור

25

חוקי דה-מורגן - הוכחה

- הוכחה : באינדוקציה על מספר פעולות AND ו-OR
- בסיס

$$(x\overbrace{````}^{m})`=(x`)\overbrace{````}^{m}$$

- צעד ראשון :

נוכיח שהחוק מתקיים כאשר יש רק פעולת OR או AND אחת.
ההוכחה באינדוקציה שלמה, ובקיצור :

$P(x_1, x_2,OR,AND)` = (x_1 \text{ OR/AND } x_2)` = x_1` \text{AND/OR } x_2` =$
$P (x_1`, x_2`,AND,OR)$

26

חוקי דה-מורגן - הוכחה

- צעד :

נניח שהחוק מתקיים כאשר מספר <u>פעולות</u> OR ו-AND קטן או שווה ל-n ונוכיח עבור מספר <u>פעולות</u> n+1

$P(x_1, x_2,\ldots, x_k,OR,AND)` =$
$(S(x_1, x_2,\ldots, x_k,OR,AND) \overset{AND}{OR} T(x_1, x_2,\ldots, x_k,OR,AND))` =$
$(S`(x_1, x_2,\ldots, x_k,OR,AND) \overset{OR}{AND} T`(x_1, x_2,\ldots, x_k,OR,AND))=$
$(S (x_1`, x_2`,\ldots,x_k` AND,OR) \overset{OR}{AND} T (x_1`, x_2`,\ldots, x_k`,AND,OR))=$
$P (x_1`, x_2`,\ldots, x_k`,AND,OR)$

27