

עצים מאוזנים

הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$.

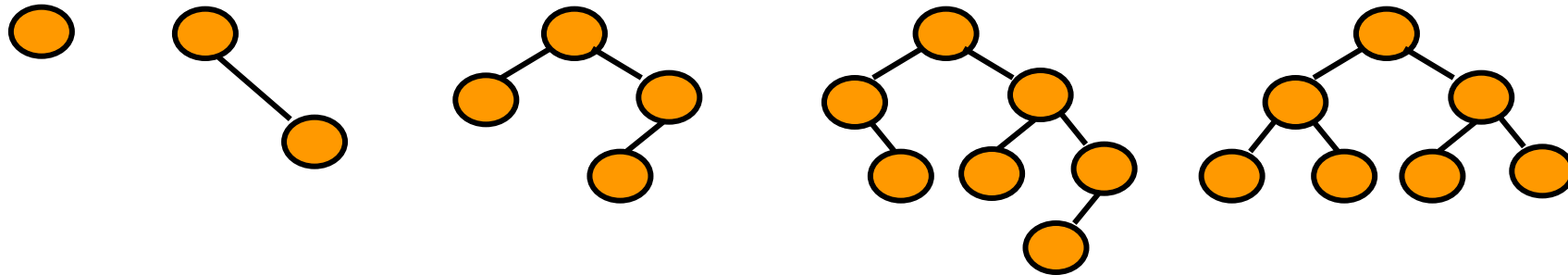
עצים מאוזנים

הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$.

עצי AVL (Adelson-Velsky, Landis)

הגדרה: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$|h(v \rightarrow \text{left}) - h(v \rightarrow \text{right})| \leq 1$$



דוגמאות

עצים מאוזנים

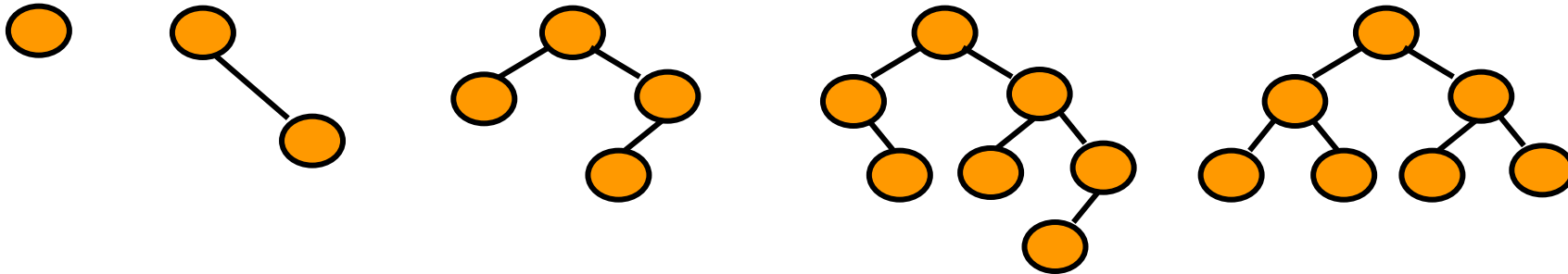
הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$.

עצי AVL (Adelson-Velsky, Landis)

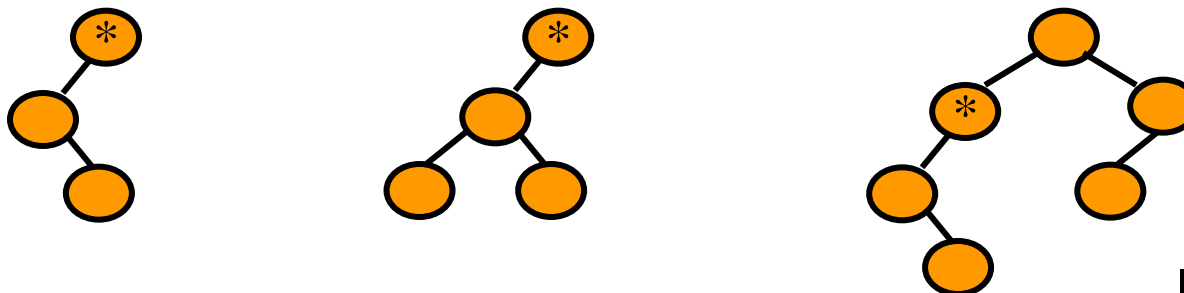
הגדרה: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$|h(v \rightarrow \text{left}) - h(v \rightarrow \text{right})| \leq 1$$

דוגמאות



דוגמאות נגד



* בצומת בו מופר האיזון

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י Fibonacci trees) F_1, \dots, F_h, \dots

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h| > a^h$ עבור קבוע a .

נראה שמספר הצמתים $n = |T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ- $|F_h|$.

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י Fibonacci trees) F_1, \dots, F_h, \dots
נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h| > a^h$ עבור קבוע a .
נראה שמספר הצמתים $n = |T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ- $|F_h|$.

מסקנה: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n > |F_h| > a^h$.

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י Fibonacci trees) F_1, \dots, F_h, \dots
 נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h| > a^h$ עבור קבוע a .
 נראה שמספר הצמתים $n = |T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ- $|F_h|$.

מסקנה: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n > |F_h| > a^h$.
 לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י Fibonacci trees) F_1, \dots, F_h, \dots
 נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h| > a^h$ עבור קבוע a .
 נראה שמספר הצמתים $n = |T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ- $|F_h|$.

מסקנה: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n > |F_h| > a^h$.
 לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

מסקנה: משפחת עצי AVL מאוזנת.

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י Fibonacci trees) F_1, \dots, F_h, \dots
 נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h| > a^h$ עבור קבוע a .
 נראה שמספר הצמתים $n = |T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ- $|F_h|$.

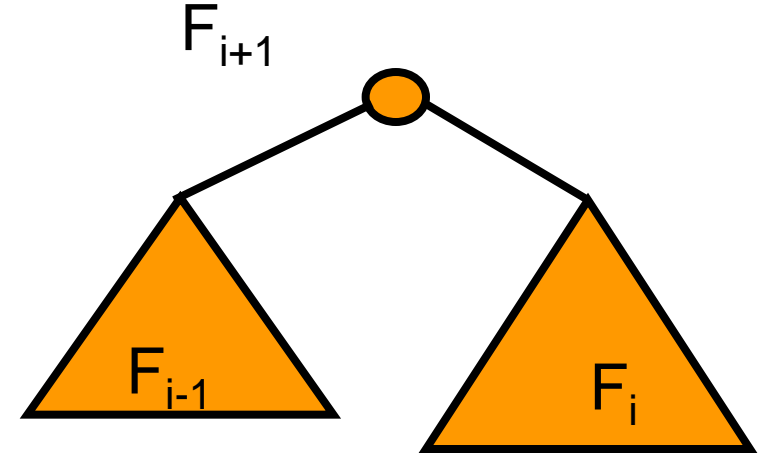
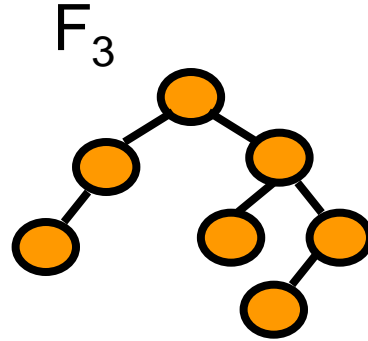
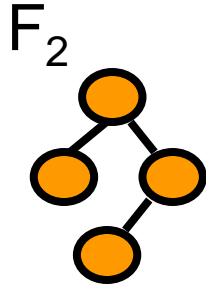
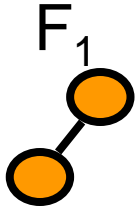
מסקנה: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n > |F_h| > a^h$.
 לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

מסקנה: משפחת עצי AVL מאוזנת.

הערה: עצי פיבונאצ'י הם עצי AVL בהם הגובה גדל הכי מהר כפונקציה של n .

חסם לגובה עץ AVL

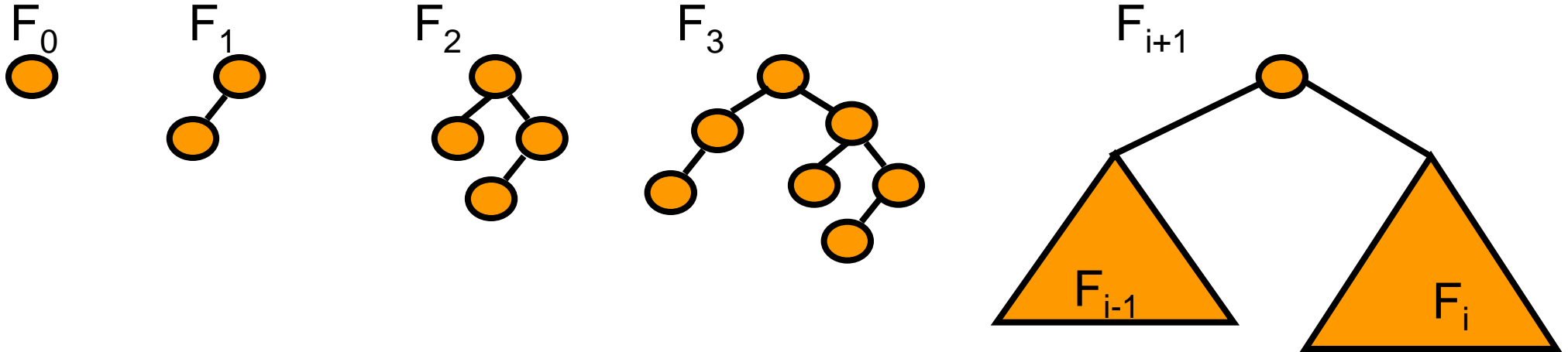
נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י (Fibonacci trees):



טענה 1: לכל h , לעץ F_h גובה h .

חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י (Fibonacci trees):



טענה 1: לכל h , לעץ F_h גובה h .

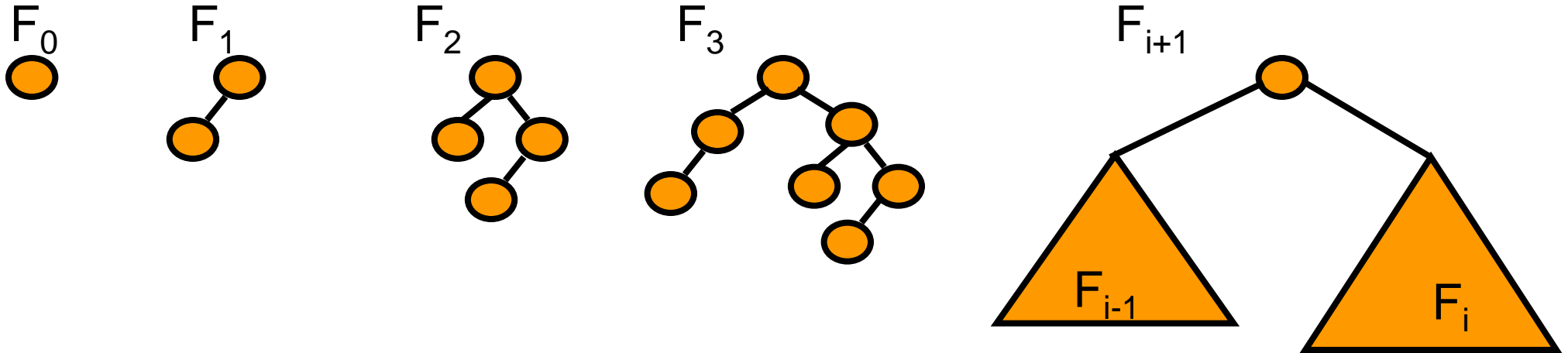
הוכחה: נכון עבור F_0 ועבור F_1 .

נמשיך באינדוקציה. מתקיים לפי הגדרת עץ פיבונאצ'י

$$\text{height}(F_{i+1}) = \text{height}(F_i) + 1 = i + 1$$

חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונאצ'י (Fibonacci trees):



טענה 1: לכל h , לעץ F_h גובה h .

הוכחה: נכון עבור F_0 ועבור F_1 .

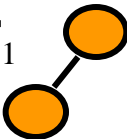
נמשיך באינדוקציה. מתקיים לפי הגדרת עץ פיבונאצ'י

$$\text{height}(F_{i+1}) = \text{height}(F_i) + 1 = i + 1$$

$$\text{טענה 2}: |F_h| = 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}| \geq |F_{h-1}|$$

חסם לגובה עץ AVL (המשך)

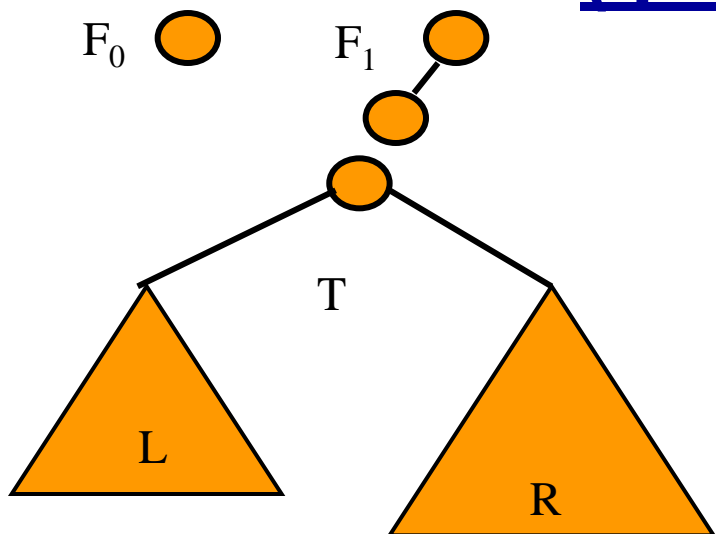
F_0 

F_1 

טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



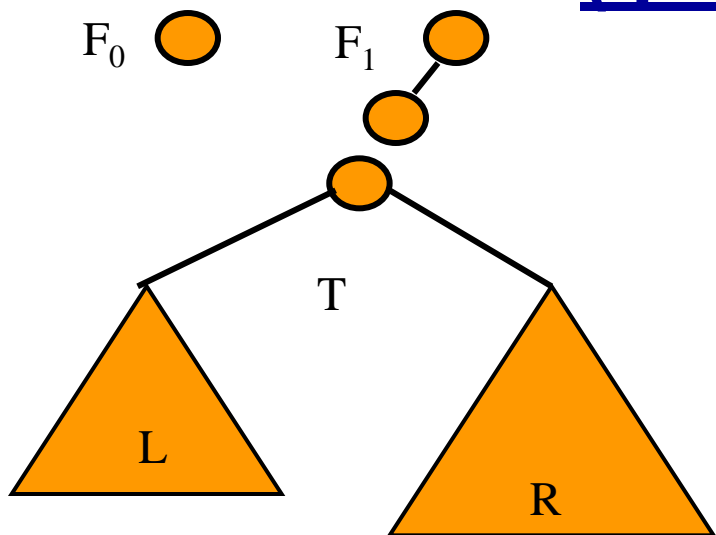
טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

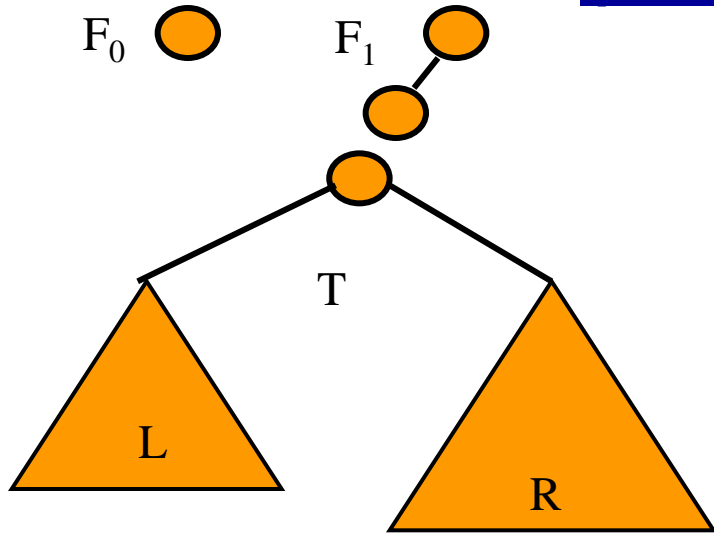
הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

• תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

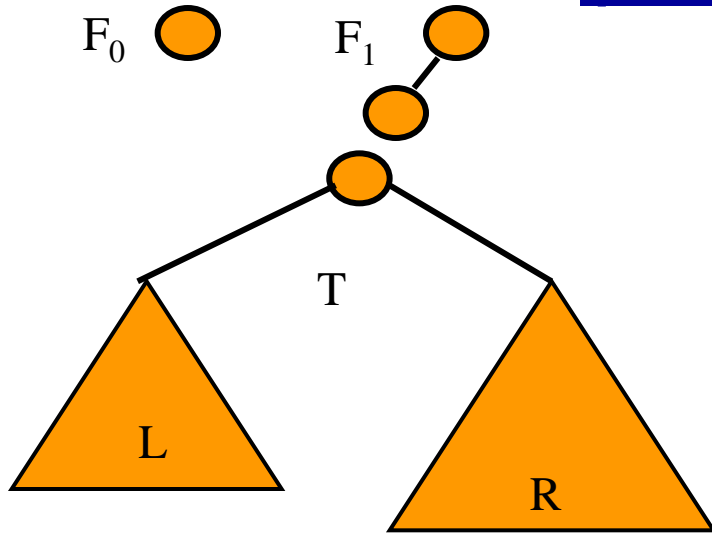
הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .
- אחד מהם (נאמר R) בגובה $h-1$ והשני בגובה $h-1$ או $h-2$.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

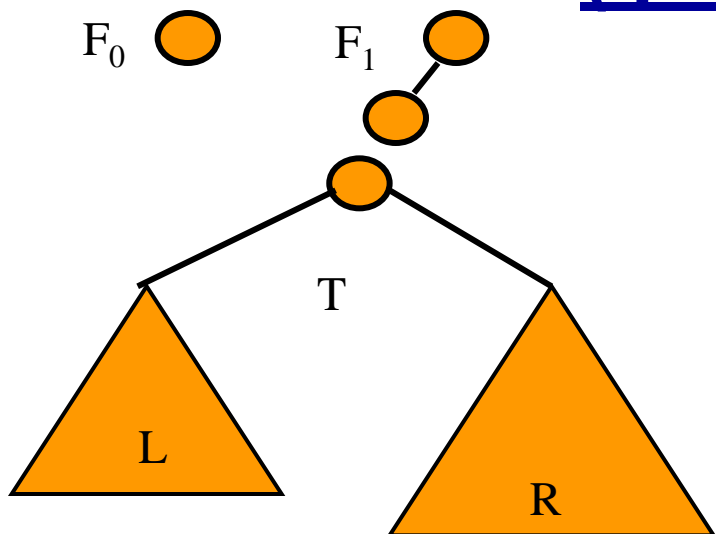
יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

• תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .

• אחד מהם (נאמר R) בגובה $h-1$ והשני בגובה $h-1$ או $h-2$.

• לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

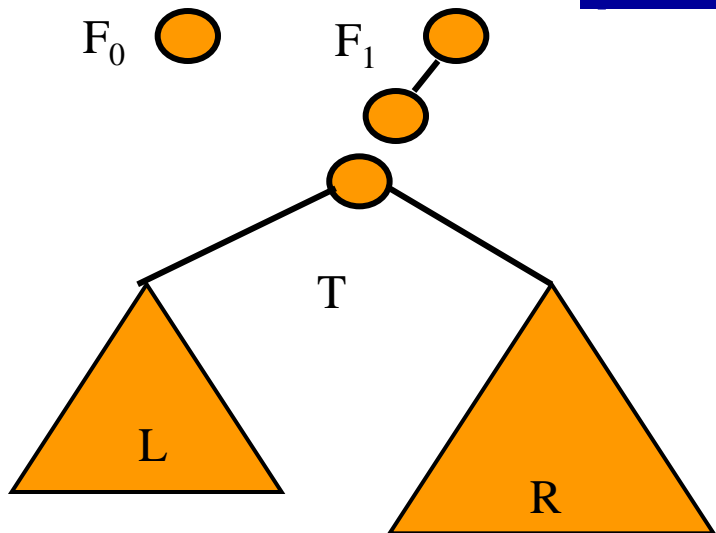
• תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .

• אחד מהם (נאמר R) בגובה $h-1$ והשני בגובה $h-1$ או $h-2$.

• לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.

• לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

• תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .

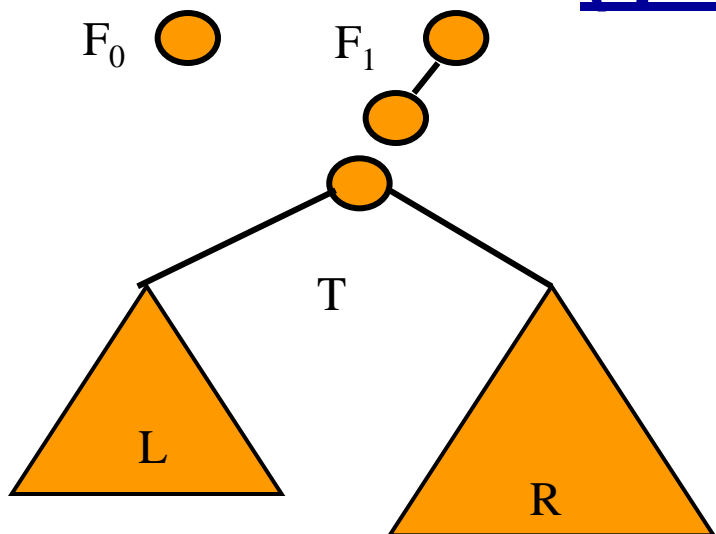
• אחד מהם (נאמר R) בגובה $h-1$ והשני בגובה $h-1$ או $h-2$.

• לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.

• לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.

• לפיכך T הוא עץ בן לפחות $|F_h|$ צמתים שכן מתקיים:

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h . אזי $|T| \geq |F_h|$.

הוכחה: באינדוקציה על h . נכון עבור $h=0$ ועבור $h=1$.

יהי T עץ AVL בעל גובה h .

יהי L תת-העץ השמאלי ו- R תת-העץ הימני כמצויר.

• תתי העצים L ו- R הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T .

• אחד מהם (נאמר R) בגובה $h-1$ והשני בגובה $h-1$ או $h-2$.

• לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.

• לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.

• לפיכך T הוא עץ בן לפחות $|F_h|$ צמתים שכן מתקיים:

$$|T| = 1 + |R| + |L| \geq 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}| = |F_h|$$

מספרי פיבונצ'י

סדרת פיבונצ'י n_i מוגדרת באופן הבא :

$$n_0 = 0, \quad n_1 = 1, \quad n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$$

$$n_2 = 1, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 3, \quad n_5 = 5, \quad n_6 = 8$$

טענה 4: מתקיים $n_i = \frac{\Phi^i - \bar{\Phi}^i}{\sqrt{5}}$ כאשר $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.608$ וכן $\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (Φ נקרא יחס הזהב).

הערה: מכיוון שמתקיים $|\bar{\Phi}| < 1 < |\Phi|$ נובע גם $n_i \approx \frac{\Phi^i}{\sqrt{5}}$ עבור i גדול.

מספרי פיבונצ'י (המשך)

$$n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$$

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה.

$$n_i = a \cdot x^i$$

נניח פתרון מהצורה:

מספרי פיבונצ'י (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל: $a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

מספרי פיבונצ'י (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל: $a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \bar{\Phi}^i$$

מספרי פיבונצ'י (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל: $a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \bar{\Phi}^i$$

שימוש בתנאי השפה מוביל

$$n_0 = 0 \Rightarrow a \cdot \Phi^0 + b \cdot \bar{\Phi}^0 = a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad \text{למציאת הקבועים:}$$

$$n_1 = 1 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - a \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

מספרי פיבונצ'י (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל: $a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \bar{\Phi}^i$$

שימוש בתנאי השפה מוביל

$$n_0 = 0 \Rightarrow a \cdot \Phi^0 + b \cdot \bar{\Phi}^0 = a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad \text{למציאת הקבועים:}$$

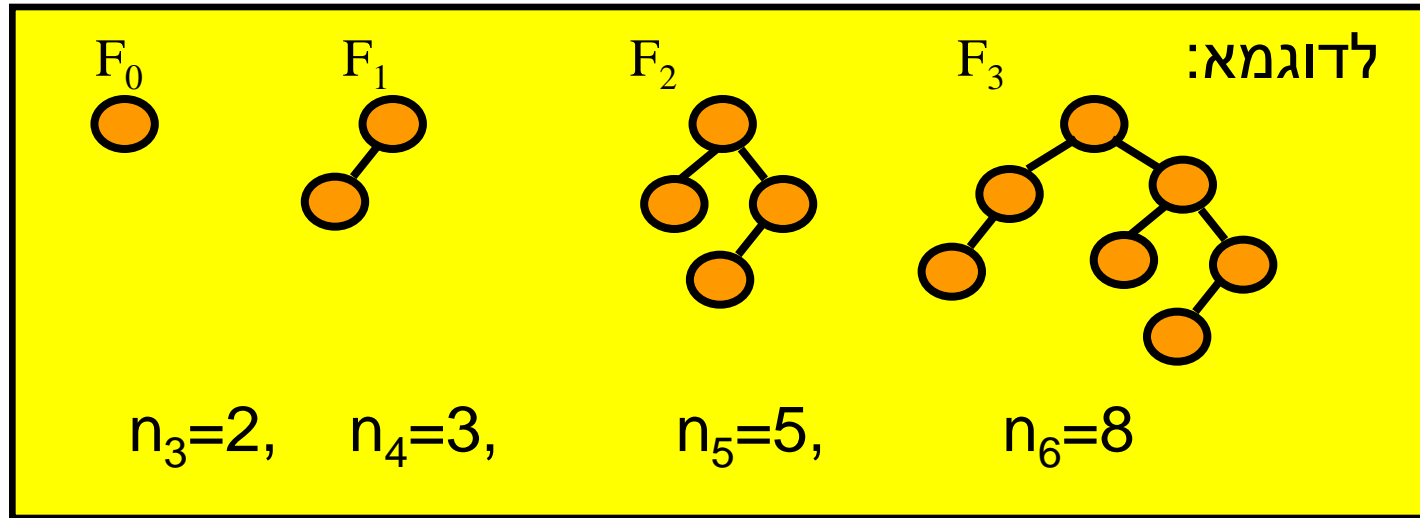
$$n_1 = 1 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - a \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$n_i = \frac{\Phi^i - \bar{\Phi}^i}{\sqrt{5}}$$

לפיכך פתרון המשוואה הוא:

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .



ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:
 $|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב- F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:
 $|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב- F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:
 $t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

$$t_0 = 2 \quad t_1 = 3$$

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:
 $|F_0| = 1$ $|F_1| = 2$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב- F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:
 $t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

זו המשוואה של מספרי פיבונצ'י כשנקודת ההתחלה מוזזת

$$t_0 = 2 \quad t_1 = 3$$

בשלושה אינדקסים ולכן מתקיים:

$$t_i = n_{i+3}$$

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצ'י F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצ'י ה- i .

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:
 $|F_0| = 1$ $|F_1| = 2$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב- F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:
 $t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

זו המשוואה של מספרי פיבונצ'י כשנקודת ההתחלה מוזזת בשלושה אינדקסים ולכן מתקיים:
 $t_0 = 2$ $t_1 = 3$

$$t_i = n_{i+3}$$

הוכחה פורמלית מתקבלת באינדוקציה על i . בסיס

$$t_0 = 2 = n_3 \quad t_1 = 3 = n_4$$

האינדוקציה:

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1} = n_{i+3} + n_{i+2} = n_{i+4}$$

צעד האינדוקציה:

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h , אזי $h = O(\log n)$.

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h , אזי $h = O(\log n)$.

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h = O(\log n)$.

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענה 3 מתקיים:

לאור טענות 4, 5 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \bar{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h=O(\log n)$.

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענה 3 מתקיים:

לאור טענות 4, 5 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \bar{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

$$h + 3 \leq \log_{\Phi} \left(\sqrt{5}(n + 2) \right)$$

לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h = O(\log n)$.

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענה 3 מתקיים:

לאור טענות 4, 5 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \bar{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

$$h + 3 \leq \log_{\Phi} \left(\sqrt{5}(n + 2) \right)$$

לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

$$h \leq \log_{\Phi} (n + 2) + \log_{\Phi} (\sqrt{5}) - 3$$

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h=O(\log n)$.

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענה 3 מתקיים:

לאור טענות 4, 5 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \bar{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

$$h + 3 \leq \log_{\Phi} \left(\sqrt{5}(n + 2) \right)$$

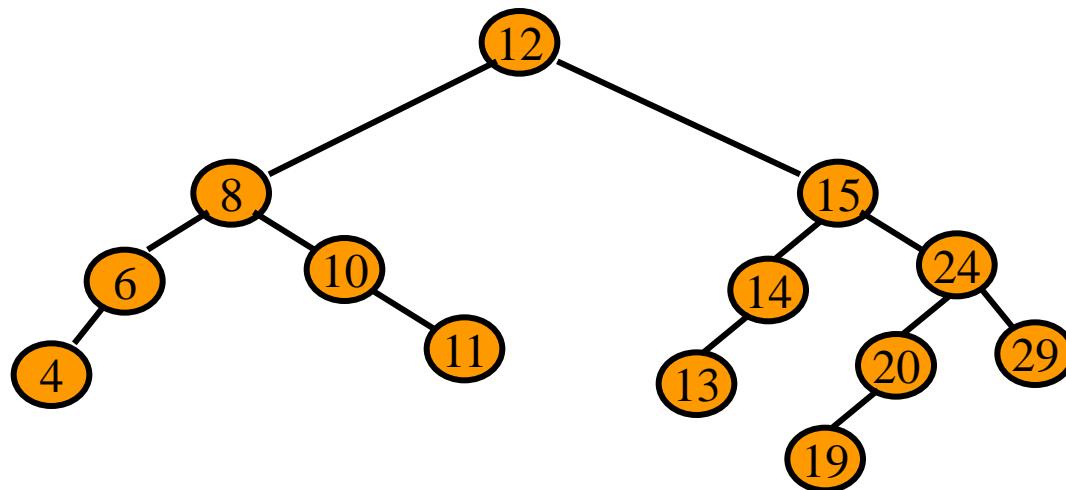
לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

$$h \leq \log_{\Phi} (n + 2) + \log_{\Phi} (\sqrt{5}) - 3$$

$$\therefore h = O(\log n)$$

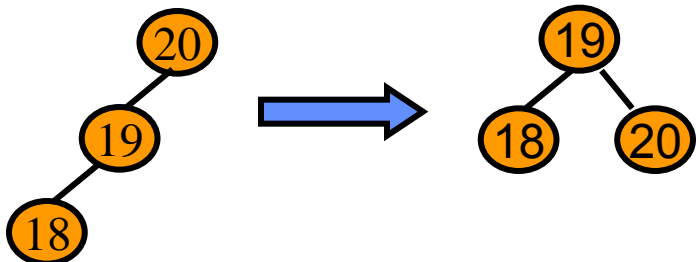
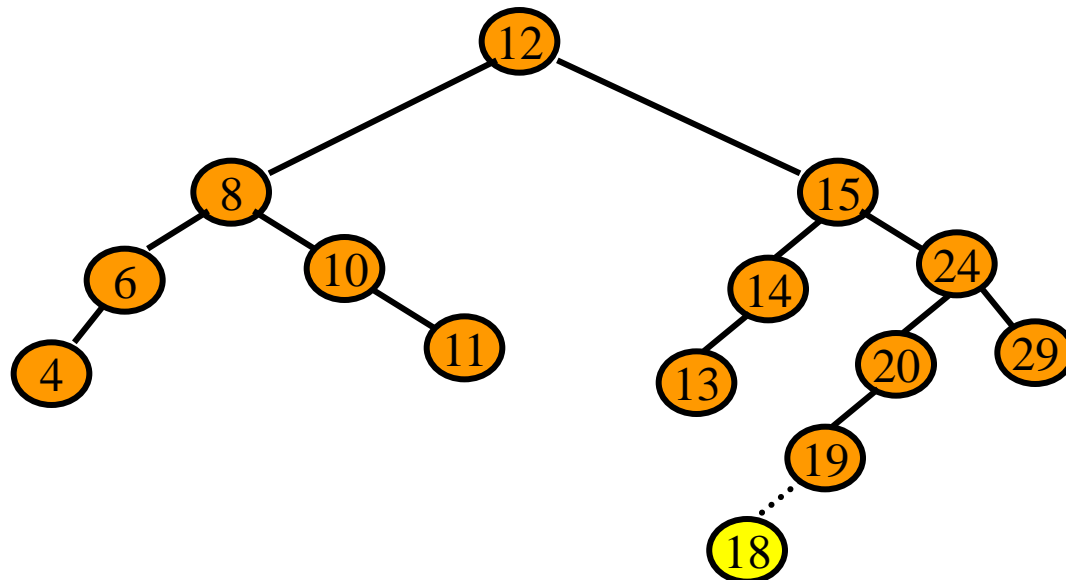
איזון בעץ AVL

מטענה 6 נובע שזמן החיפוש בעץ AVL הוא $O(\log n)$. נצטרך לדאוג שלאחר הכנסה או הוצאה, העץ הנותר יהיה עץ AVL.



איזון בעץ AVL

מטענה 6 נובע שזמן החיפוש בעץ AVL הוא $O(\log n)$. נצטרך לדאוג שלאחר הכנסה או הוצאה, העץ הנותר יהיה עץ AVL.



לאחר הוספת האיבר 18 נתקבל עץ שאינו עץ AVL. אבל נתן לשנות את תת העץ שבו הופר האיזון בצורה הבאה:

תיקון כזה נקרא גלגול.

בזמן הוצאה קיימת הפרת איזון דומה. למשל בהוצאת 29.

איזון בעץ AVL (המשך)

עבור צומת v בעץ בינרי נסמן:

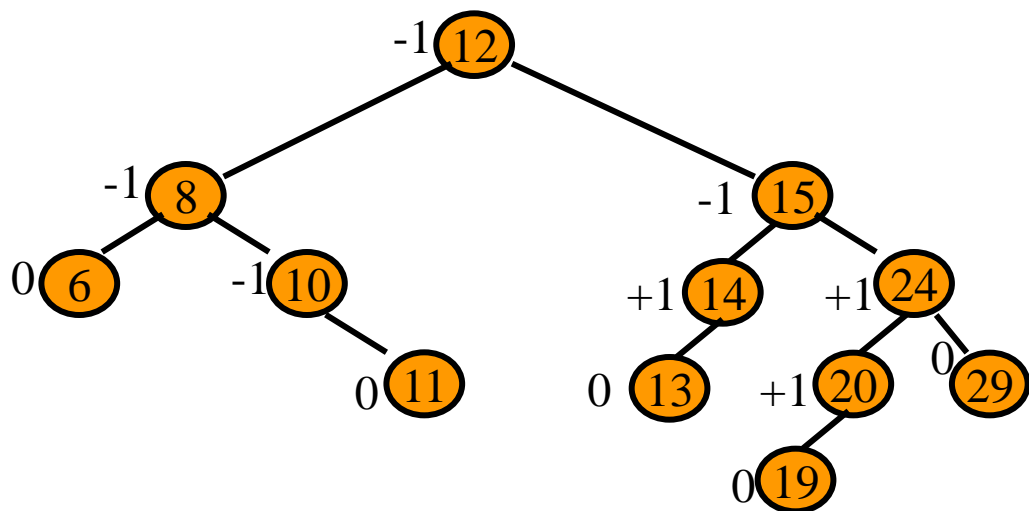
$h_L(v)$ גובה תת העץ השמאלי של v .

$h_R(v)$ גובה תת העץ הימני של v .

גורם האיזון (Balance Factor) מחושב כהפרש

הגבהים: $BF(v) = h_L(v) - h_R(v)$

לדוגמא:



מצד שמאל של כל צומת
מסומן גורם האיזון.

איזון בעץ AVL (המשך)

עבור צומת v בעץ בינרי נסמן:

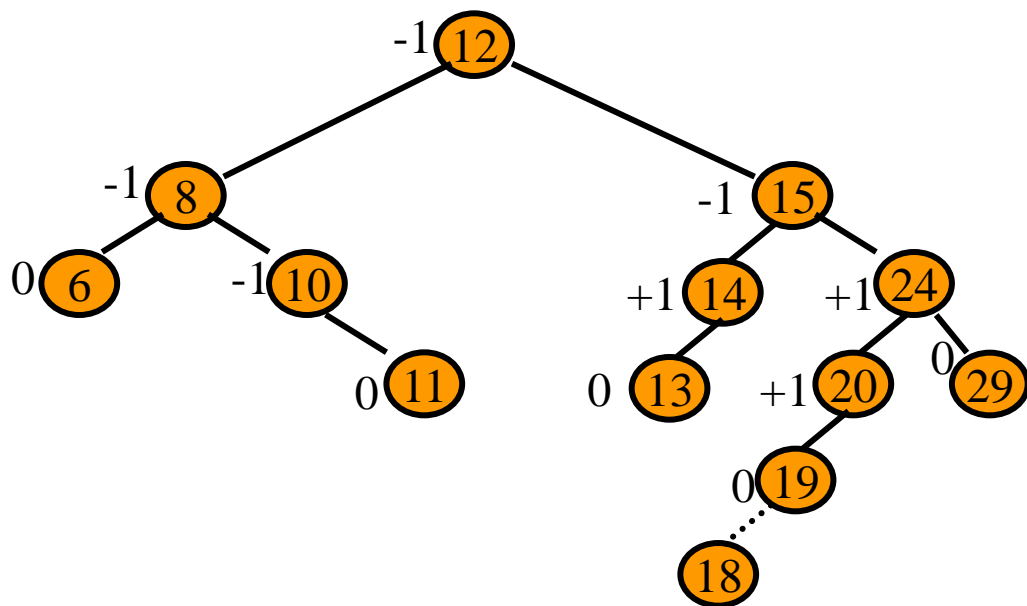
$h_L(v)$ גובה תת העץ השמאלי של v .

$h_R(v)$ גובה תת העץ הימני של v .

גורם האיזון (Balance Factor) מחושב כהפרש

הגבהים: $BF(v) = h_L(v) - h_R(v)$

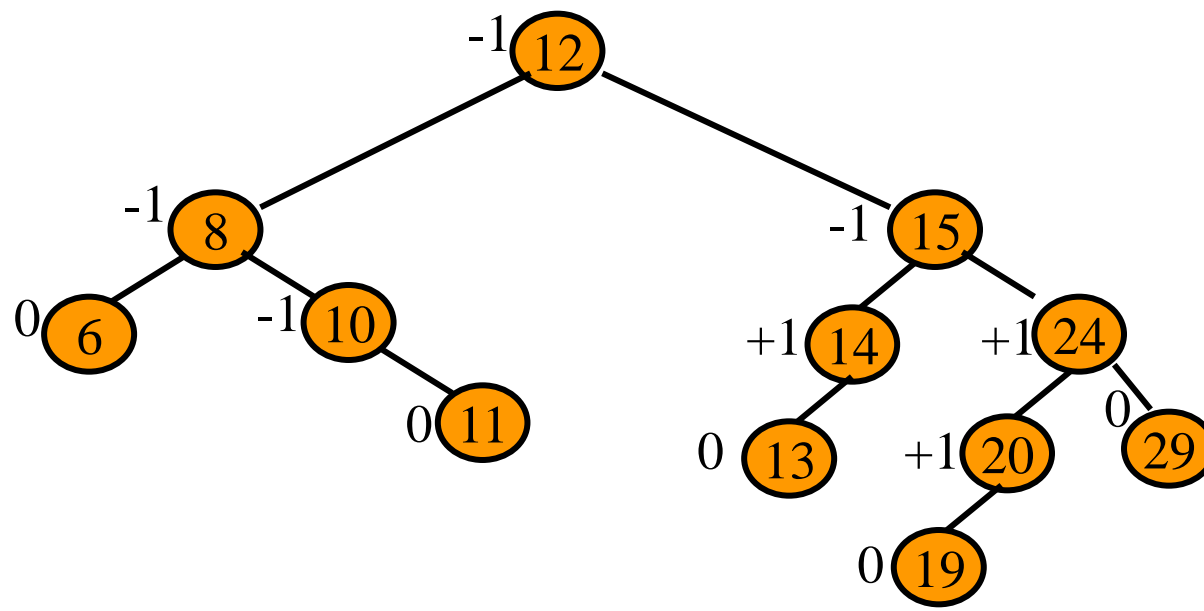
לדוגמא:



מצד שמאל של כל צומת
מסומן גורם האיזון.

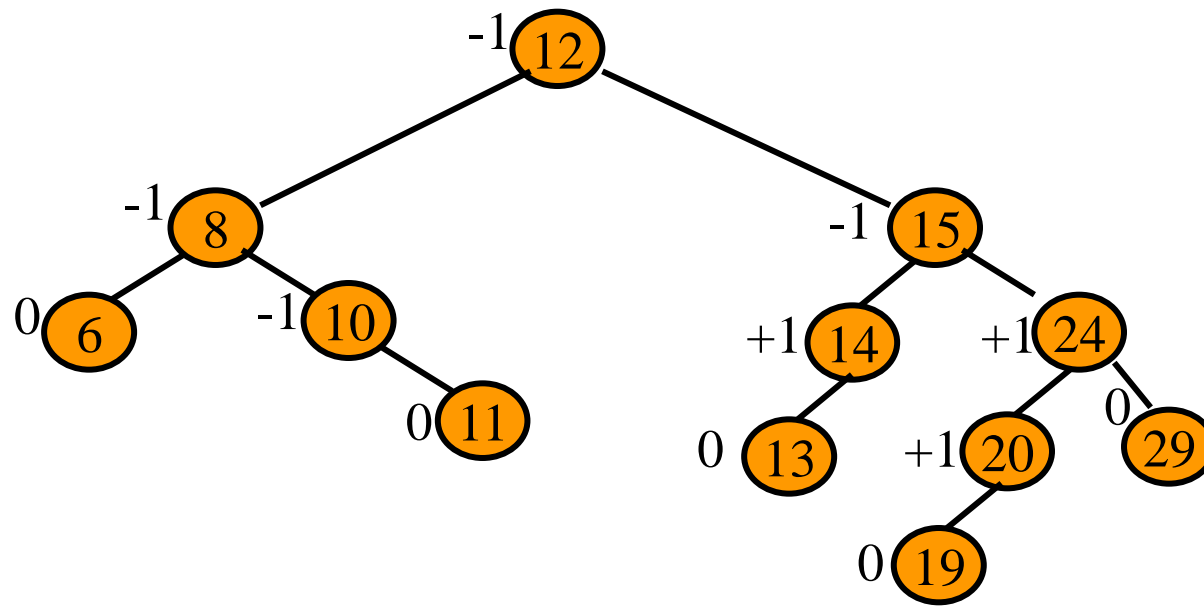
אחרי ההכנסה של 18 גורם האיזון מופר על מסלול ההכנסה.

אבחנות



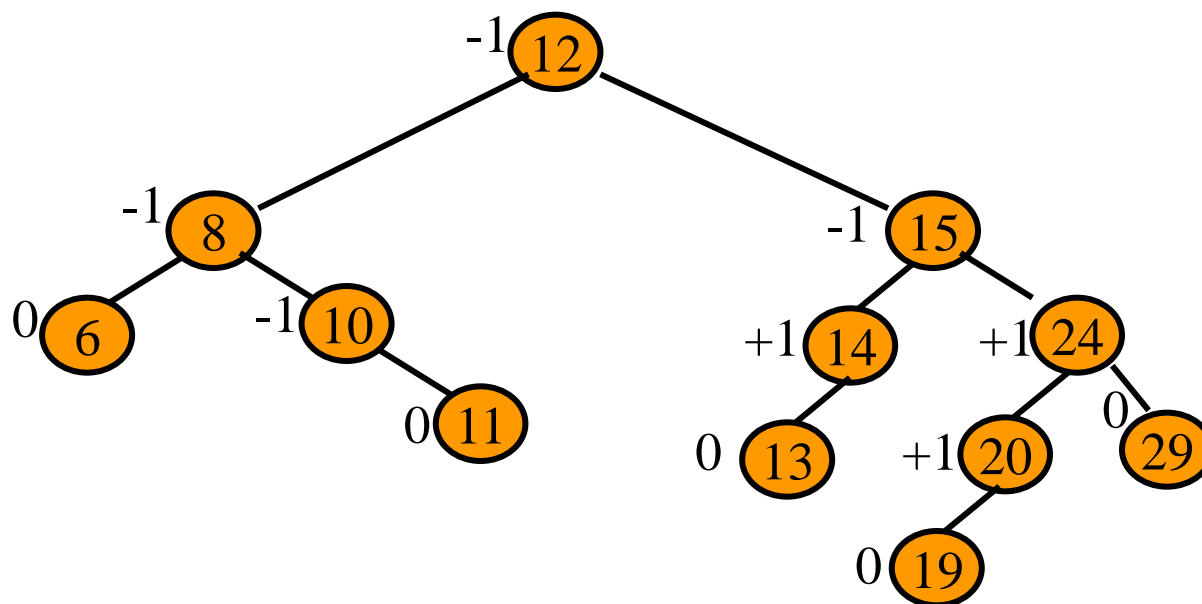
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.



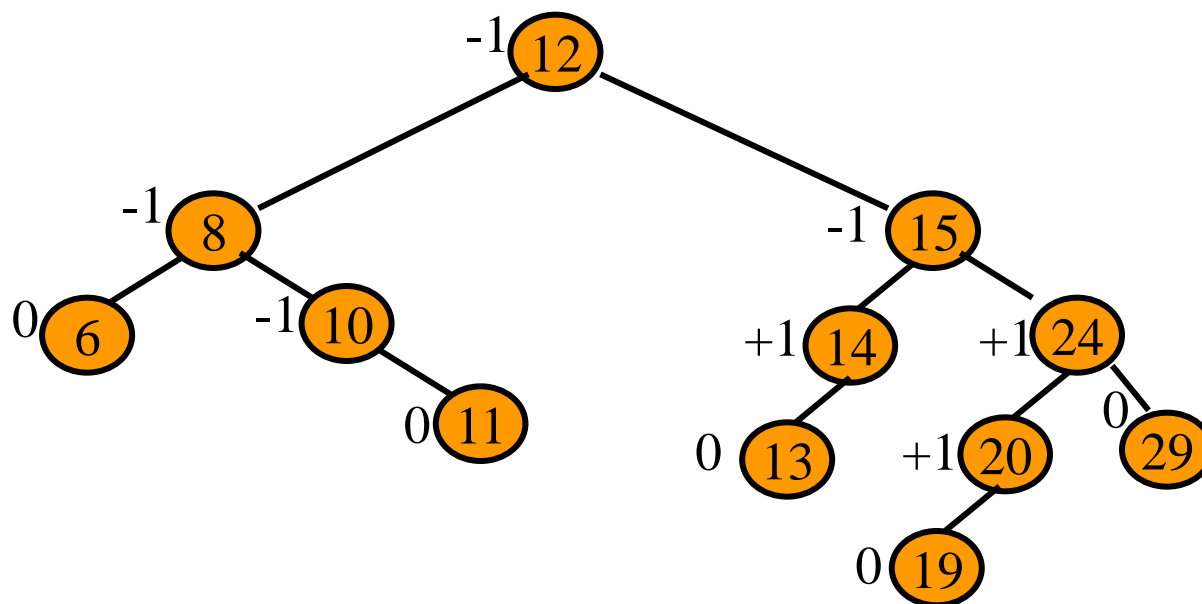
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.



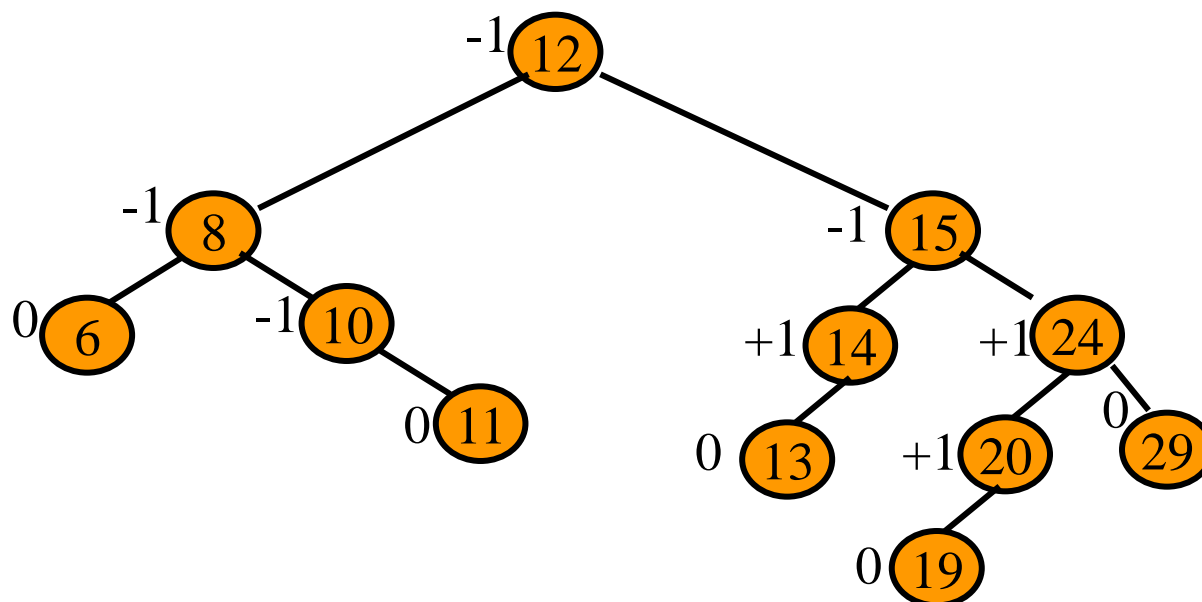
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל-2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.



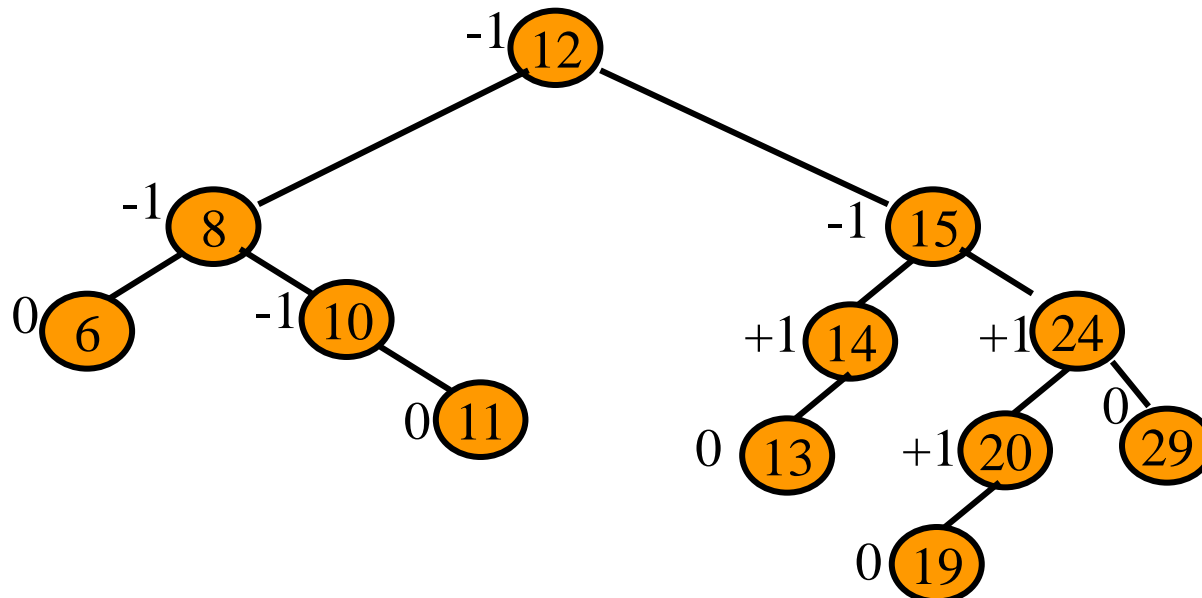
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל-2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.
4. גלגול – פעולה המתבצעת על צומת שהופר בו האיזון על מנת להחזירו לתחום המותר $[-1 \dots 1]$.



אבחנות

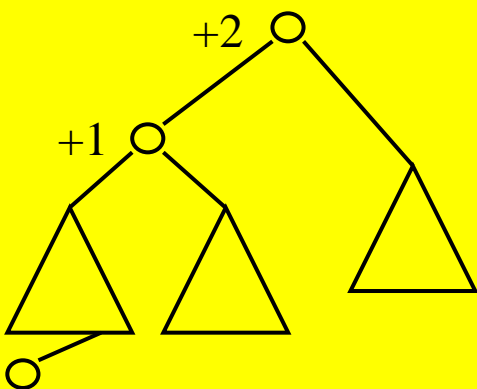
1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל-2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.
4. גלגול – פעולה המתבצעת על צומת שהופר בו האיזון על מנת להחזירו לתחום המותר $[-1 \dots 1]$.
5. גורם האיזון לא יכול להיות גדול מ-2 בערכו המוחלט כי בכל הכנסה/הוצאה הוא משתנה ב-1 לכל היותר.



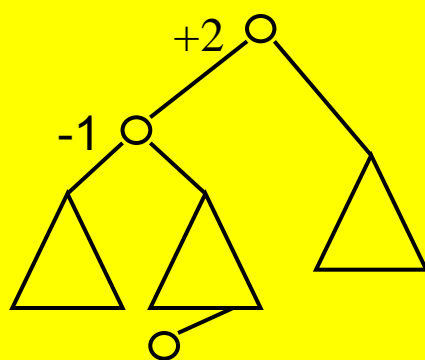
סוגי הגלגולים

סוג הגלגול, כלומר הדרך לתקן חוסר איזון בצומת, תלוי בצורה בה האיזון מופר.
נתן לסוג חוסר איזון בארבע קטגוריות שונות המכסות את כל המקרים.

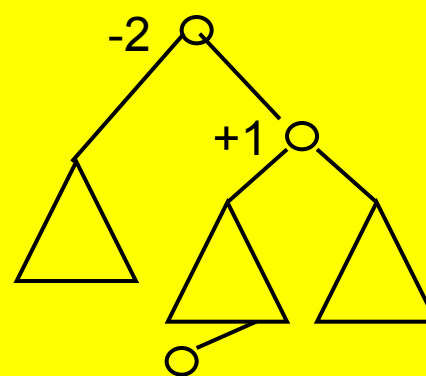
גלגול LL



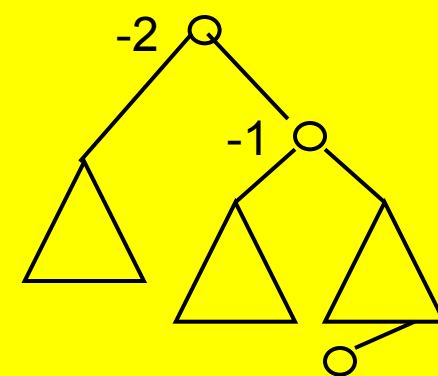
גלגול LR



גלגול RL



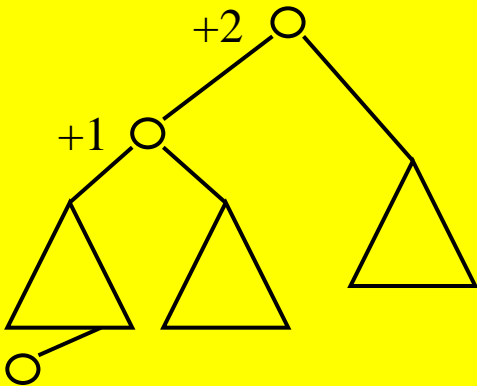
גלגול RR



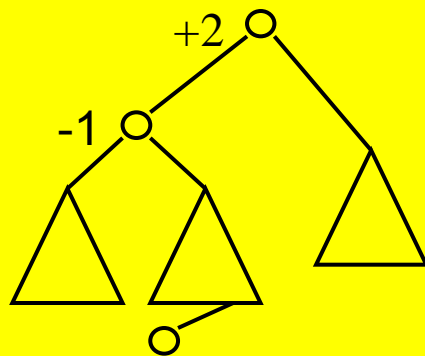
סוגי הגלגולים

סוג הגלגול, כלומר הדרך לתקן חוסר איזון בצומת, תלוי בצורה בה האיזון מופר.
נתן לסוג חוסר איזון בארבע קטגוריות שונות המכסות את כל המקרים.

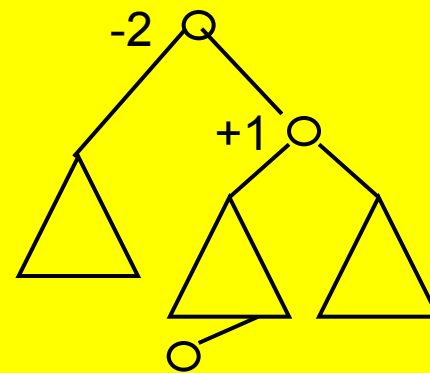
גלגול LL



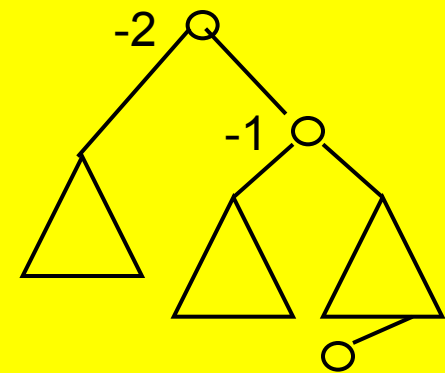
גלגול LR



גלגול RL

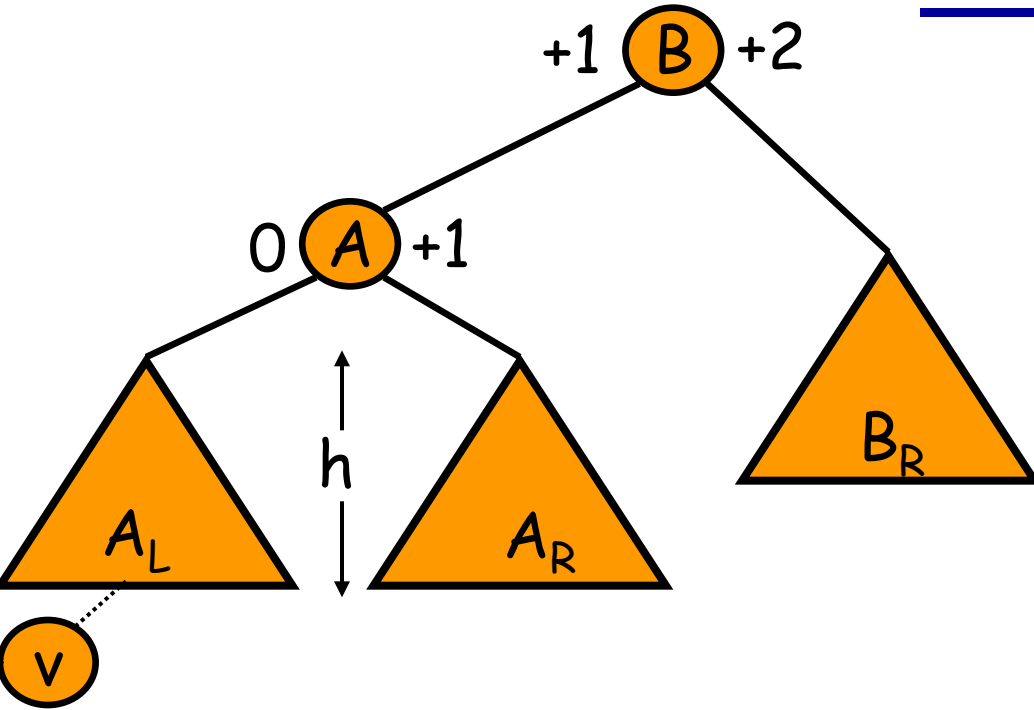


גלגול RR



הגלגול המתאים	בבן הימני v_R	בבן השמאלי v_L	בשורש v
LL		$BF(v_L) \geq 0$	$BF(v)=2$
LR		$BF(v_L) = -1$	$BF(v)=2$
RR	$BF(v_R) \leq 0$		$BF(v) = -2$
RL	$BF(v_R) = 1$		$BF(v) = -2$

גלגול LL



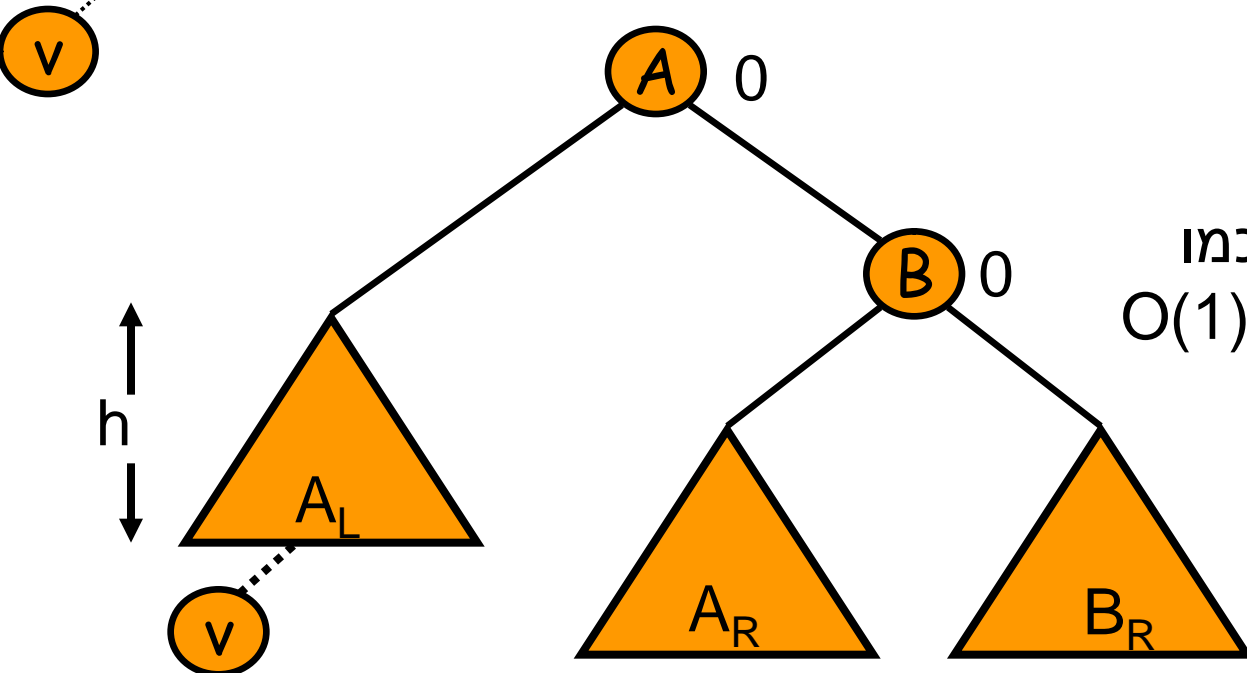
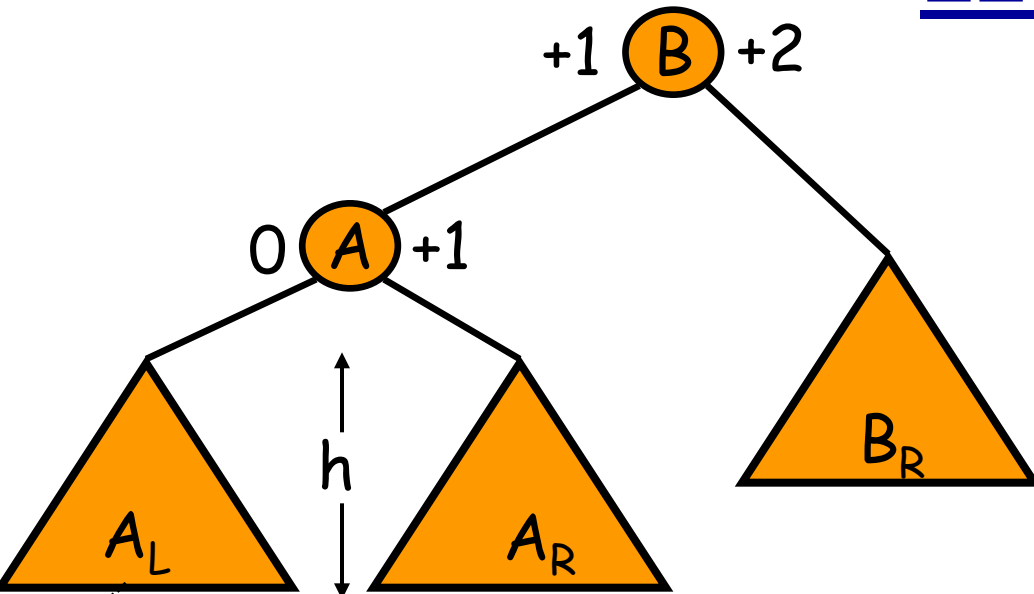
לפני הכנסת v : גובה העץ הוא $h + 2$.

הוכנס צומת v שהגדיל את גובה A_L ל- $h + 1$.

גלגול LL: יעביר את A לשורש

מצד ימין של הצמתים
מסומנים גורמי האיזון
שהשתנו.

גלגול LL



לפני הכנסת v: גובה העץ הוא $h + 2$.

הוכנס צומת v שהגדיל את גובה A_L ל- $h + 1$.

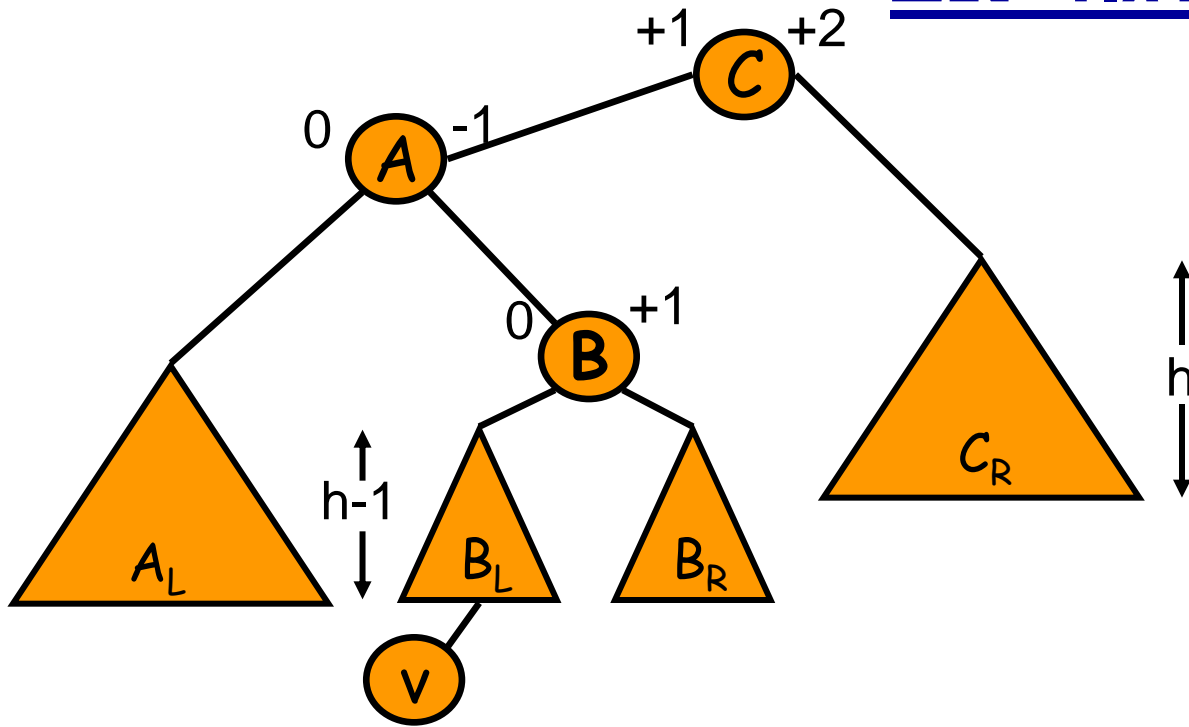
גלגול LL: יעביר את A לשורש

מצד ימין של הצמתים מסומנים גורמי האיזון שהשתנו.

אחרי הכנסת v:

גובה העץ לאחר הגלגול הוא $h + 2$, כמו לפני ההכנסה. השורש מאוזן. שינינו $O(1)$ מצביעים ולכן זמן הגלגול $O(1)$.

LR גלגול

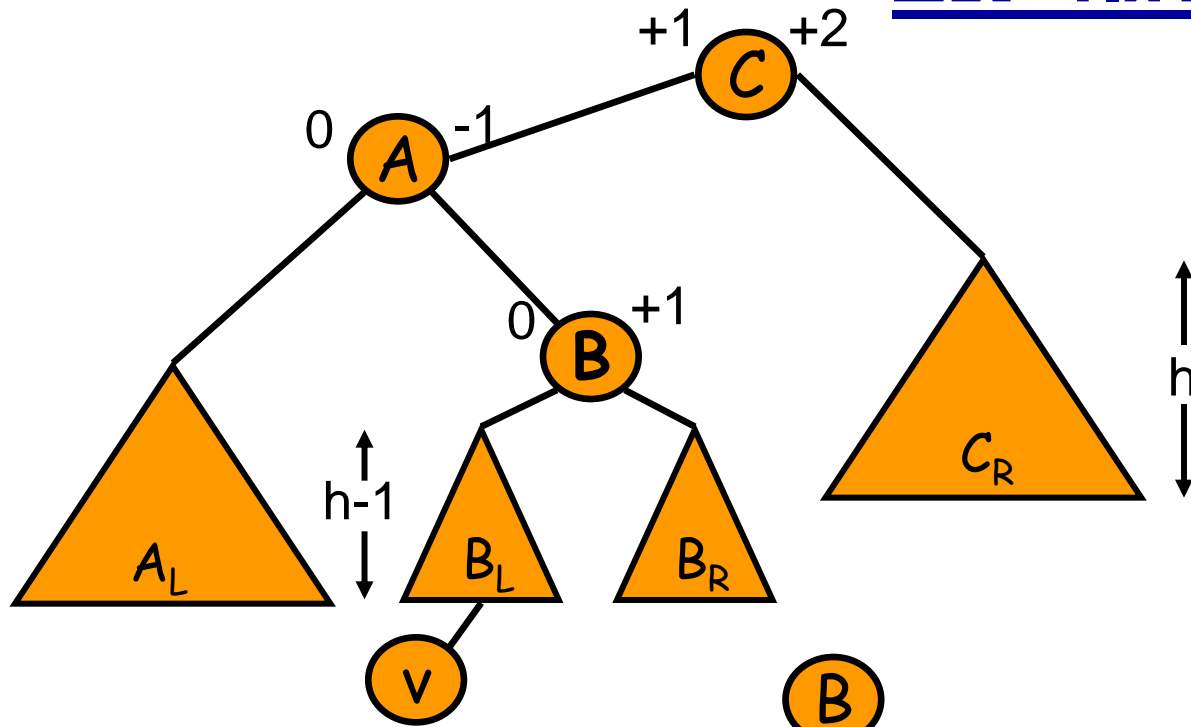


לפני הכנסת איבר v:

הוכנס איבר ל- B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל- h .

גלגול LR:

LR גלגול



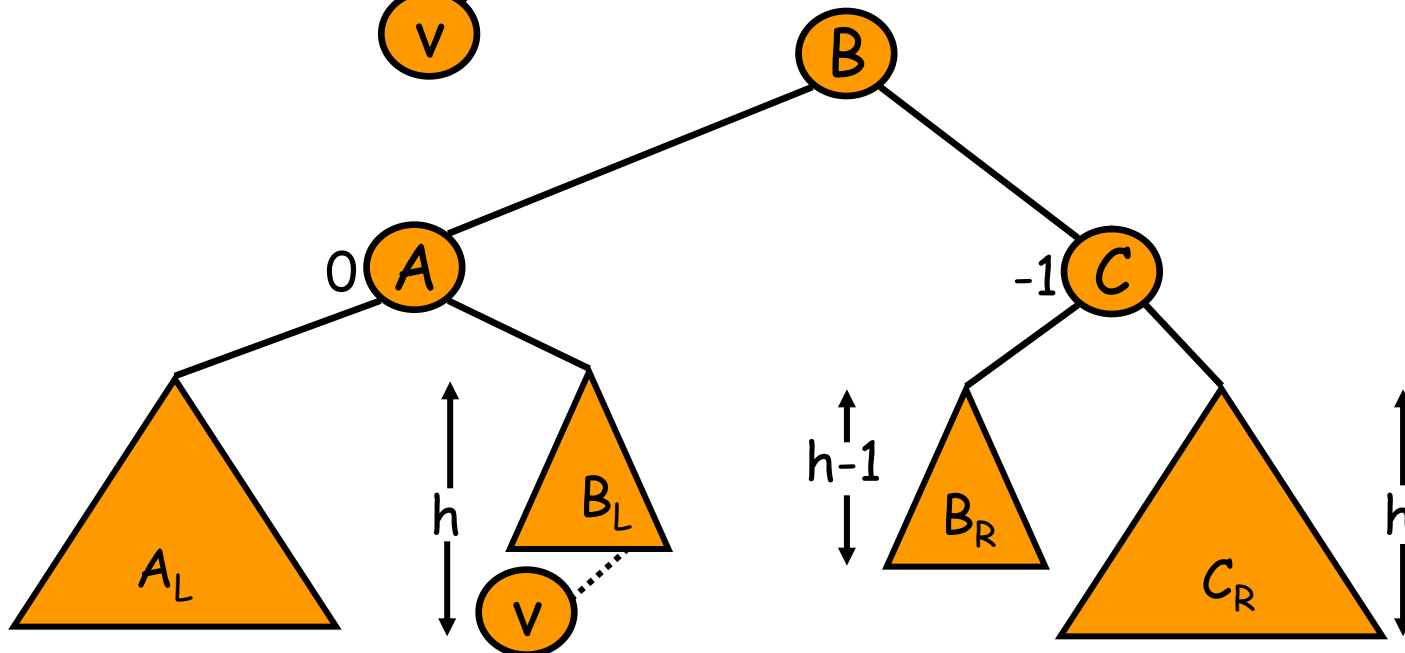
לפני הכנסת איבר v:

הוכנס איבר ל- B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל- h .

גלגול LR:

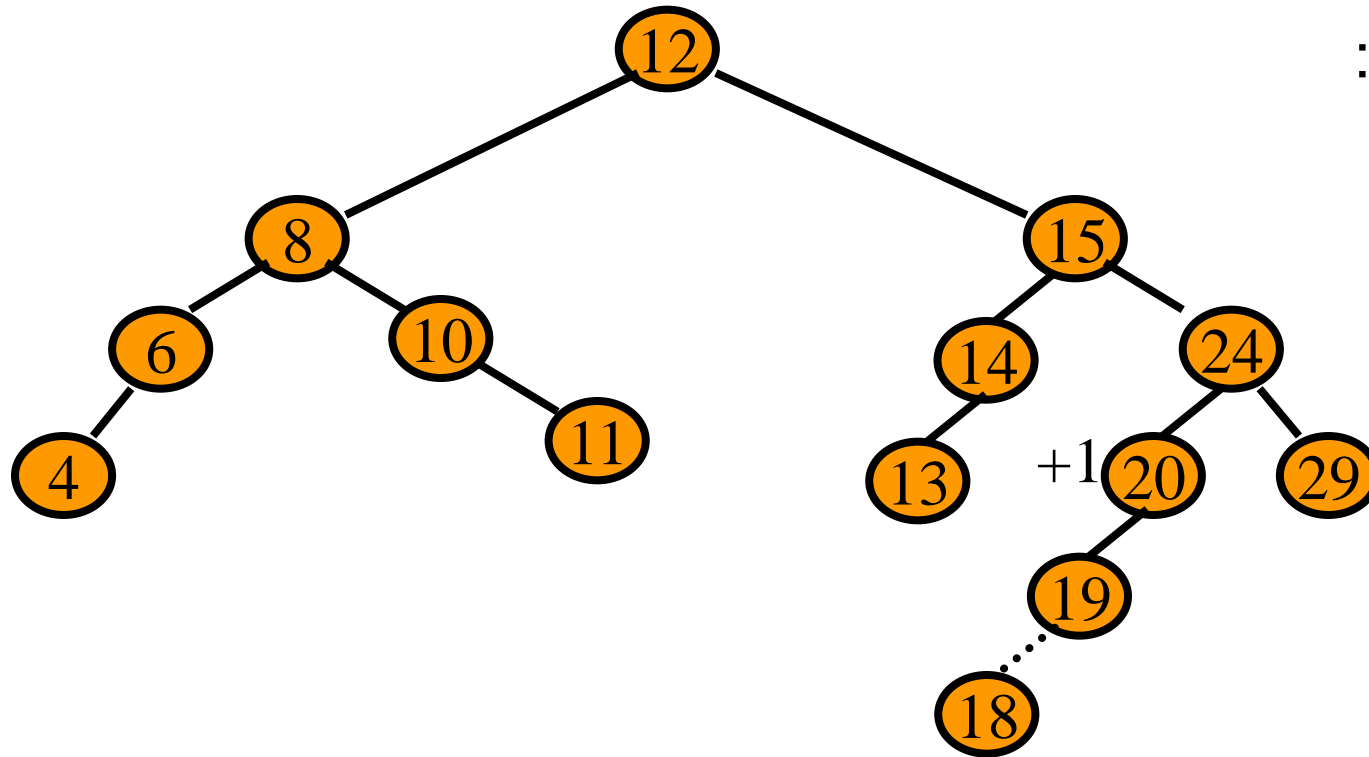
גובה העץ אחרי הגלגול הוא $h + 2$, כמו לפני ההכנסה.

שינינו $O(1)$ מצביעים ולכן זמן הגלגול $O(1)$.



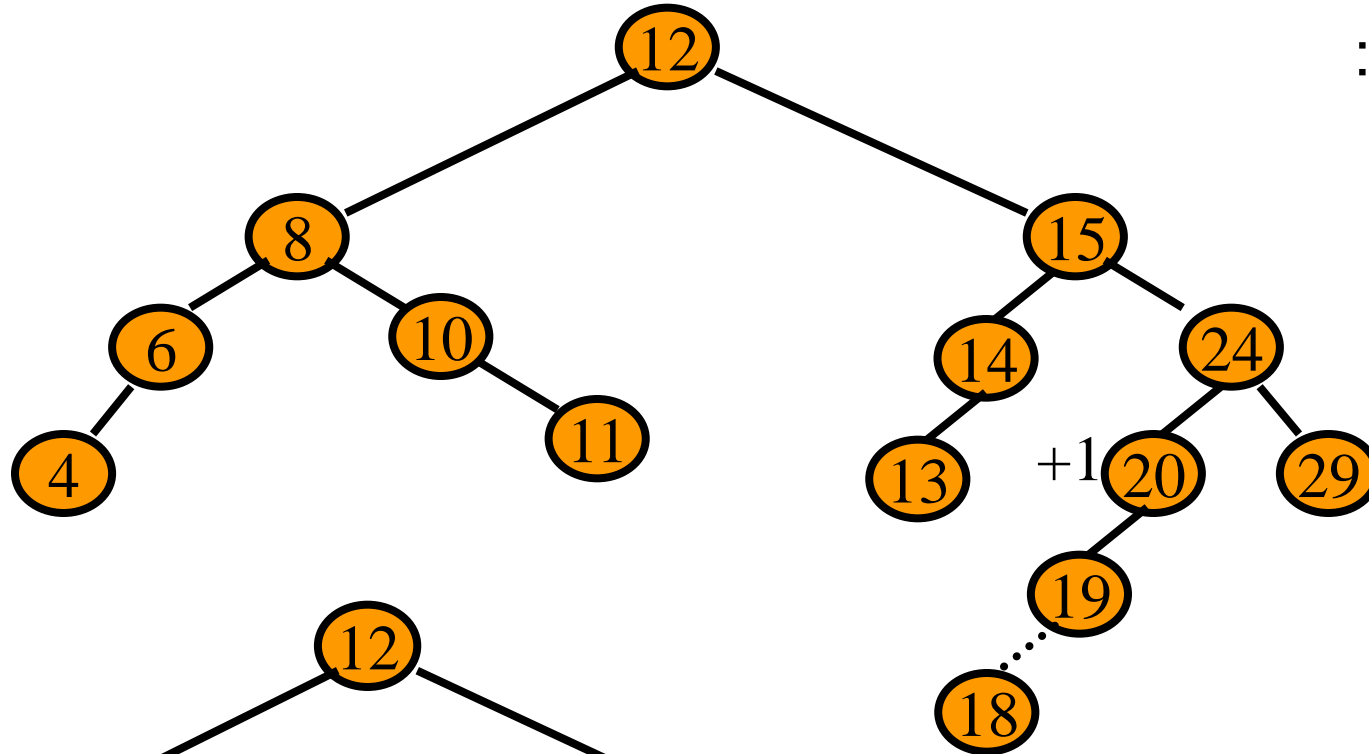
דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 18:

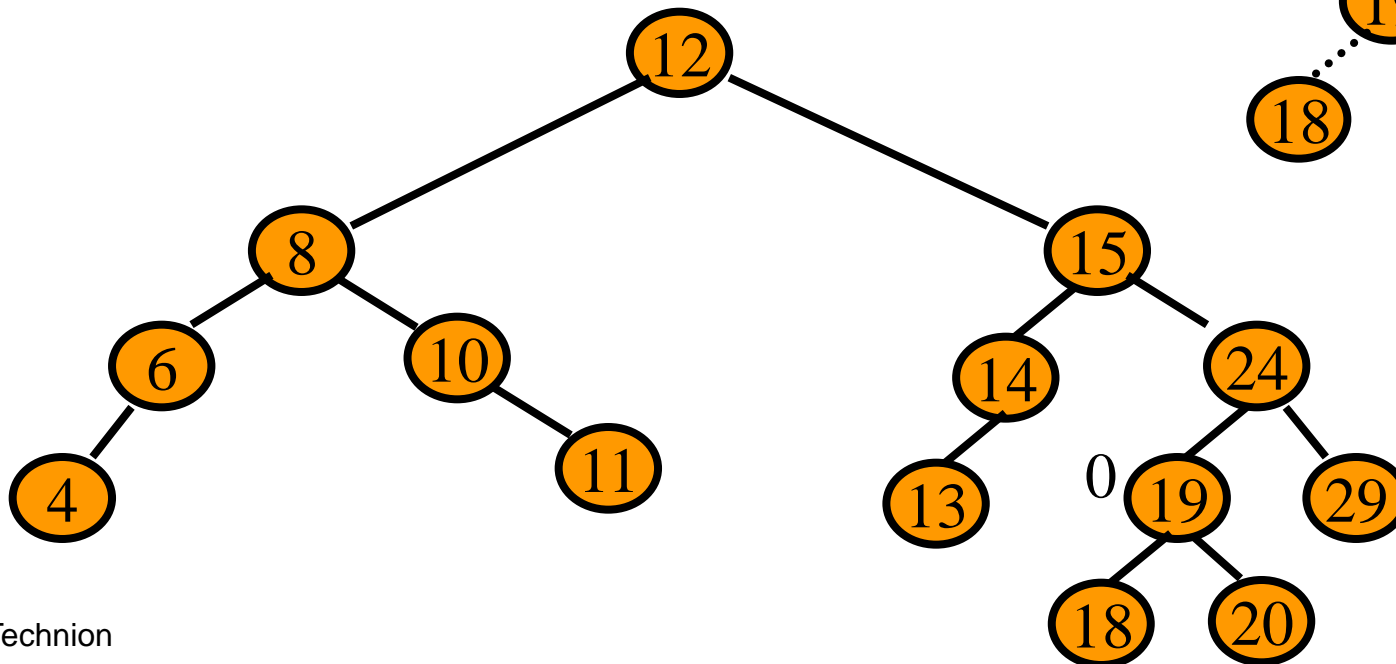


דוגמא להכנסת ערך א לעץ AVL

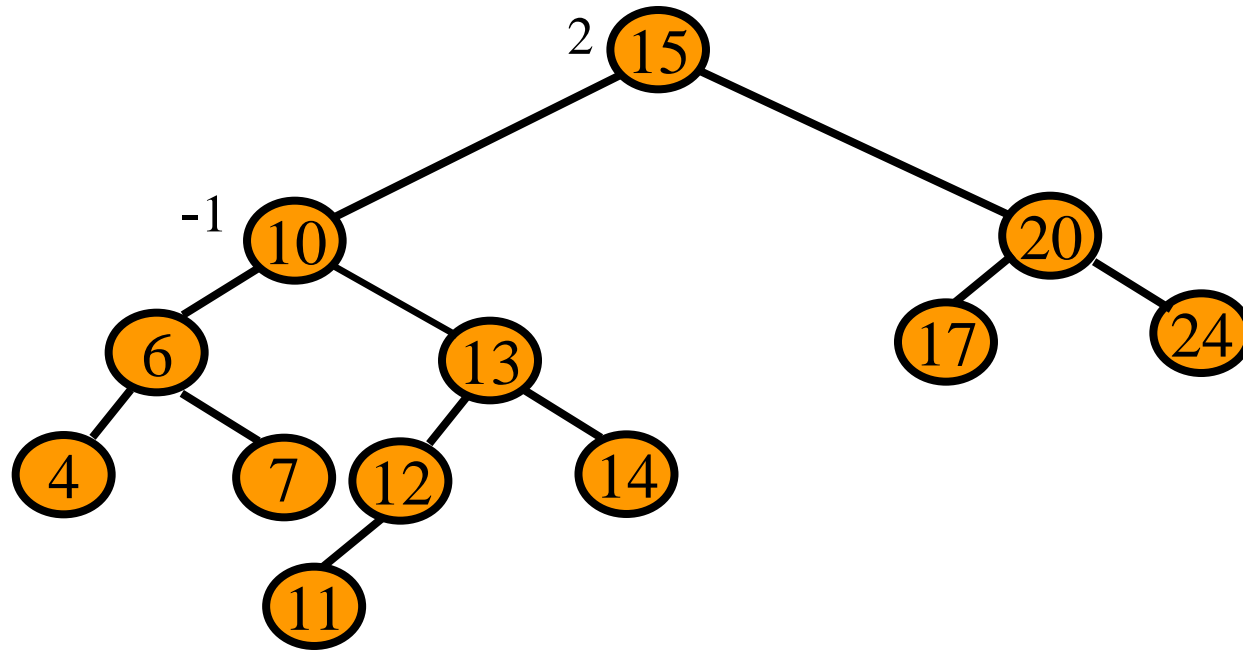
הוסף 18:



לאחר גלגול LL:

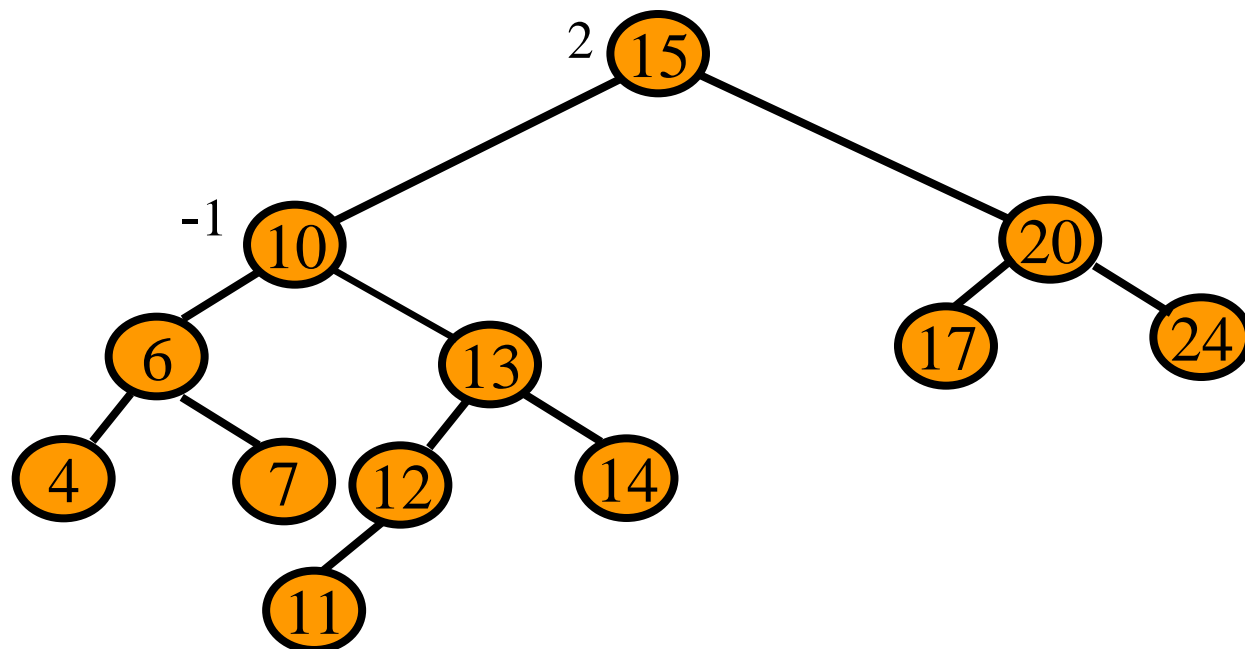


דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

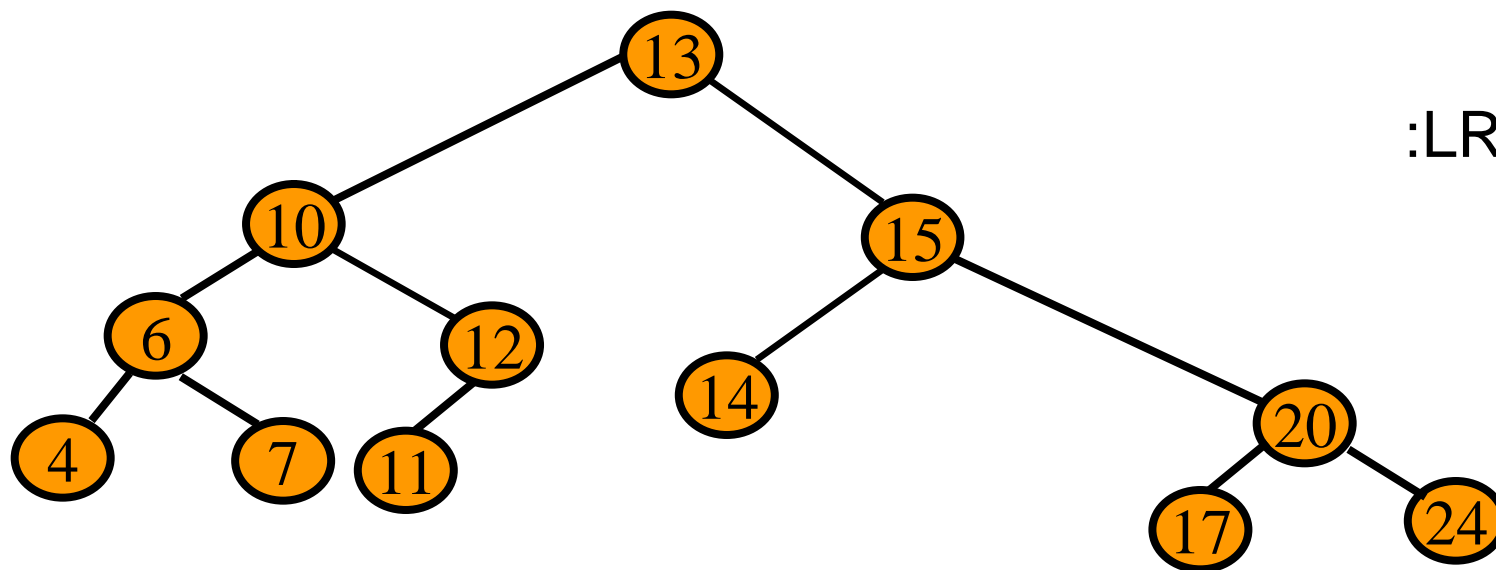


הוסף 11 :

דוגמא להכנסת ערך א לעץ AVL



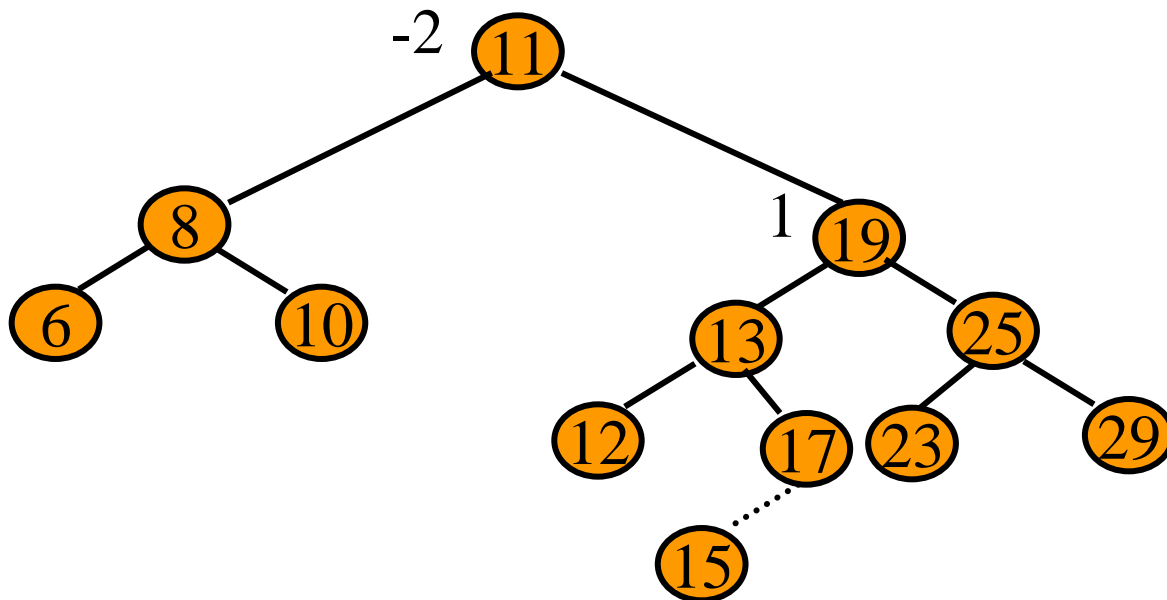
הוסף 11 :



לאחר גלגול LR:

דוגמא להכנסת ערך X לעץ AVL

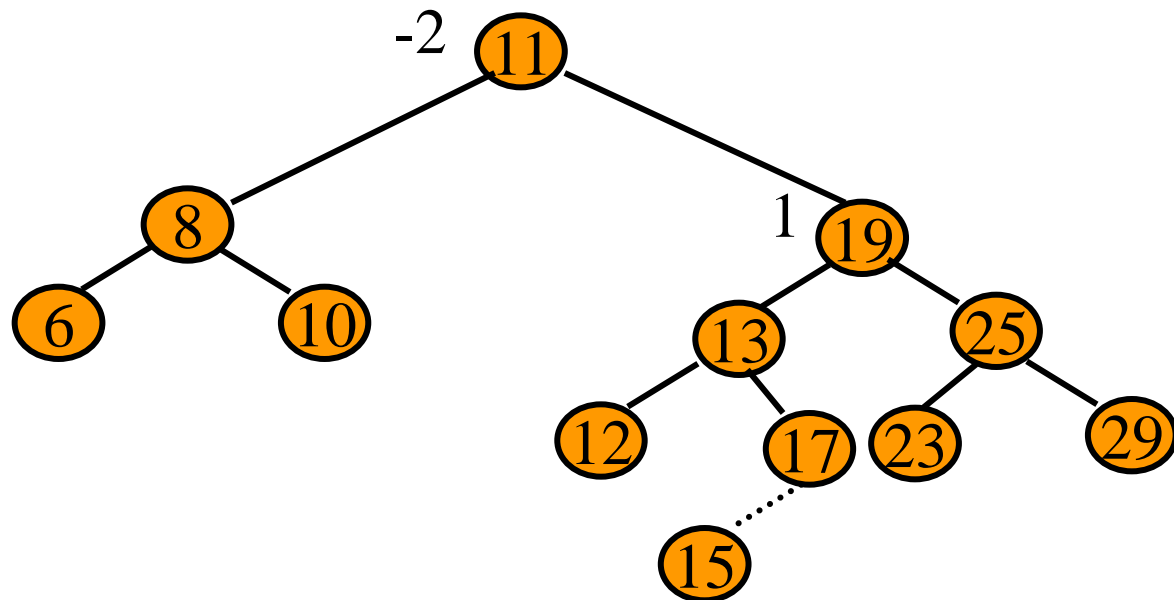
הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)



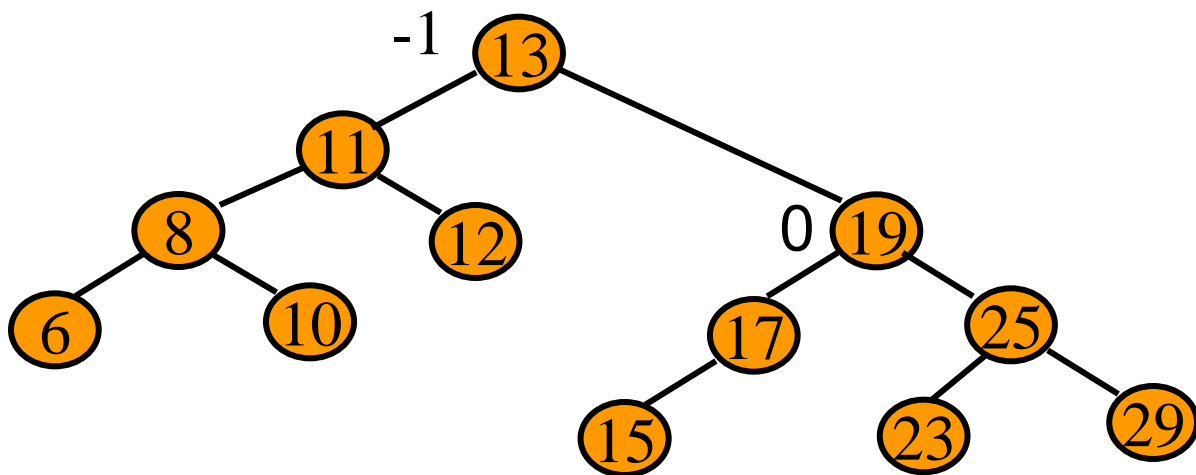
לאחר גלגול RL:

דוגמא להכנסת ערך X לעץ AVL

הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)

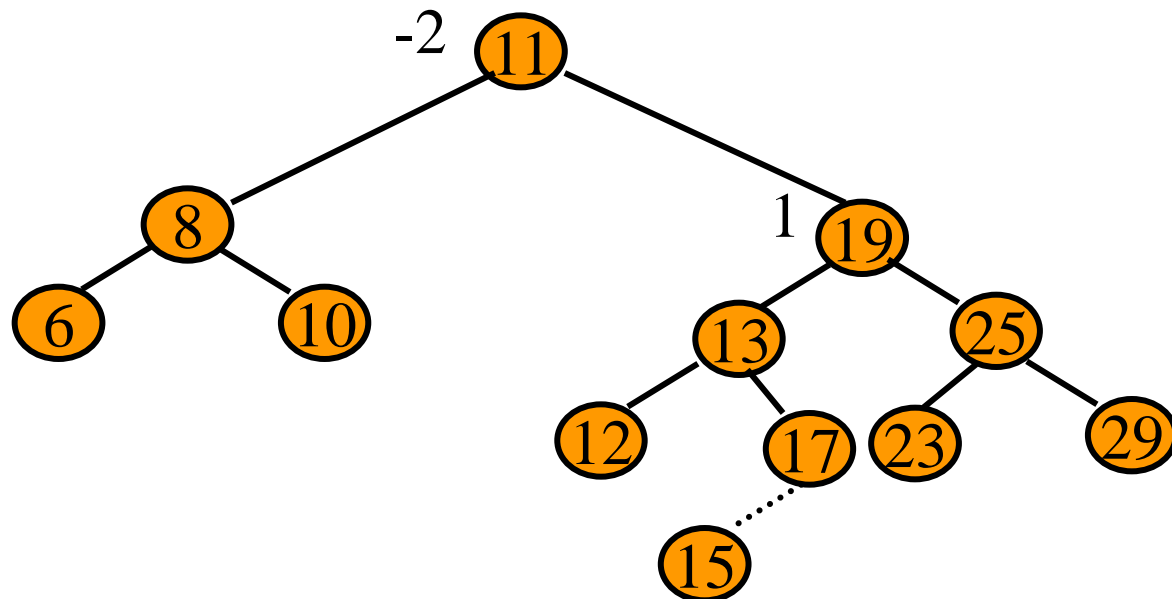


לאחר גלגול RL:

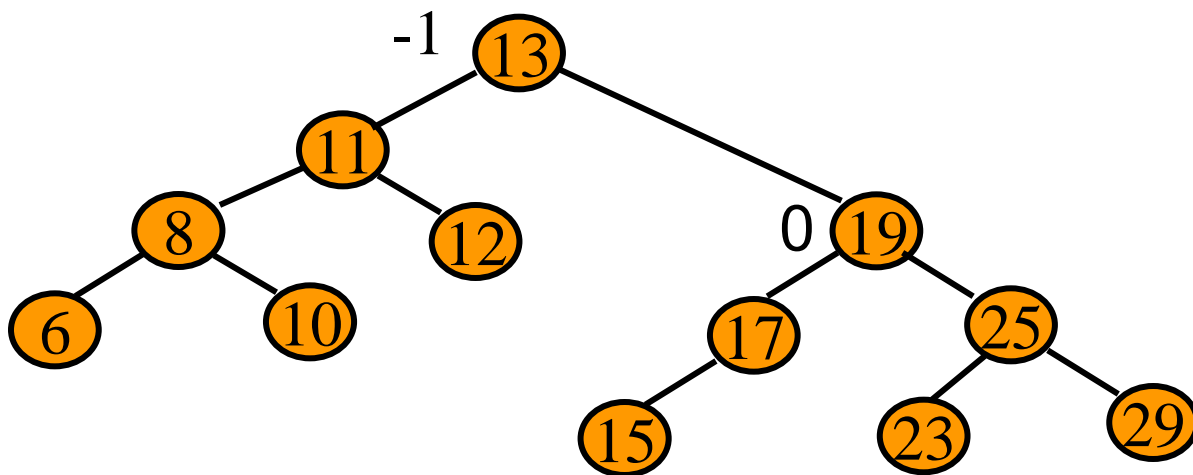


דוגמא להכנסת ערך X לעץ AVL

הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)



לאחר גלגול RL:



בהכנסה, לאחר גלגול אחד העץ מאוזן מכיוון שגובה תת העץ בו נעשה השנוי לא השתנה.

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.

$$2. \quad h(v) = 0$$

3. כל עוד $v \neq \text{root}$ בצע:

$$4. \quad p = \text{parent}(v)$$

5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.

$$6. \quad h(p) = h(v) + 1$$

7. אם ב-p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.

$$8. \quad \text{אחרת} \quad v = p$$

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.

$$2. \quad h(v) = 0$$

3. כל עוד $v \neq \text{root}$ בצע:

$$4. \quad p = \text{parent}(v)$$

5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.

$$6. \quad h(p) = h(v) + 1$$

7. אם ב-p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.

$$8. \quad \text{אחרת} \quad v = p$$

איך נחשב את $\text{parent}(v)$?

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.

$$2. \quad h(v) = 0$$

3. כל עוד $v \neq \text{root}$ בצע:

$$4. \quad p = \text{parent}(v)$$

5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.

$$6. \quad h(p) = h(v) + 1$$

7. אם ב-p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.

$$8. \quad \text{אחרת} \quad v = p$$

איך נחשב את $\text{parent}(v)$?

נוציא אותו מהמחסנית בה נמצאים כל הצמתים על המסלול מהשורש ועד v.

זמן ההכנסה מעץ AVL

כיוון שהצומת בו עושים גלגול לא משנה את גובהו,
מבצעים רק גלגול אחד.

$O(h)$ מציאת המקום הדרוש להכנסה

$O(1)$ הוספת הצומת

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$ (אם מופר)

$O(1)$ תיקון האיזון

$O(h) = O(\log n)$ סה"כ

אלגוריתם הוצאה/הכנסה

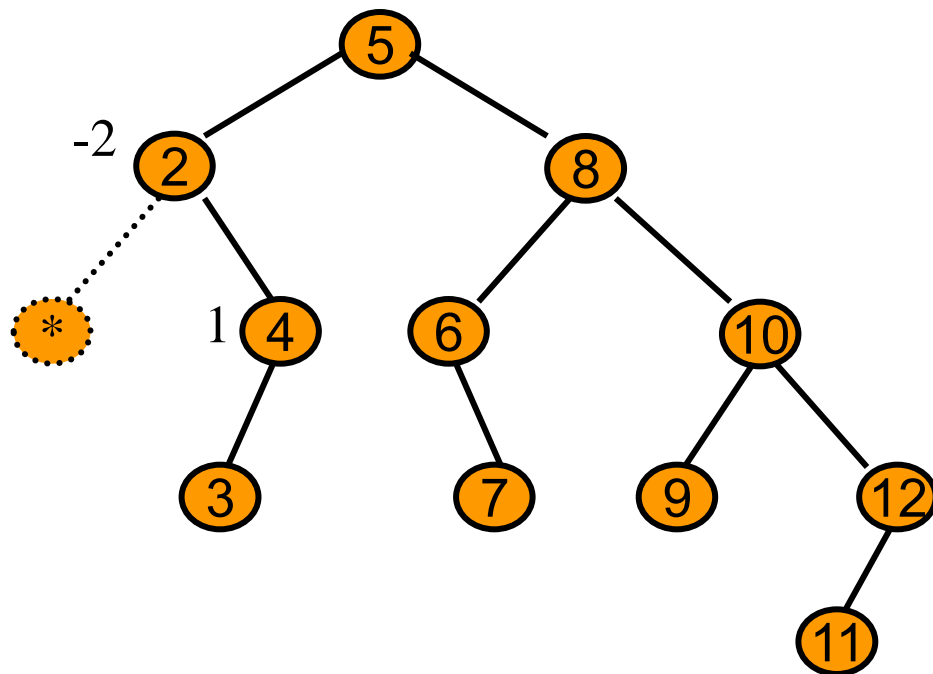
- הוצא (הכנס) צומת v כפי שהפעולה מתבצעת בעץ חיפוש בינרי.
- תקן את גורמי האיזון בצורה הבאה. לכל צומת v לאורך המסלול

החל מלמטה ועד לשורש בצע:

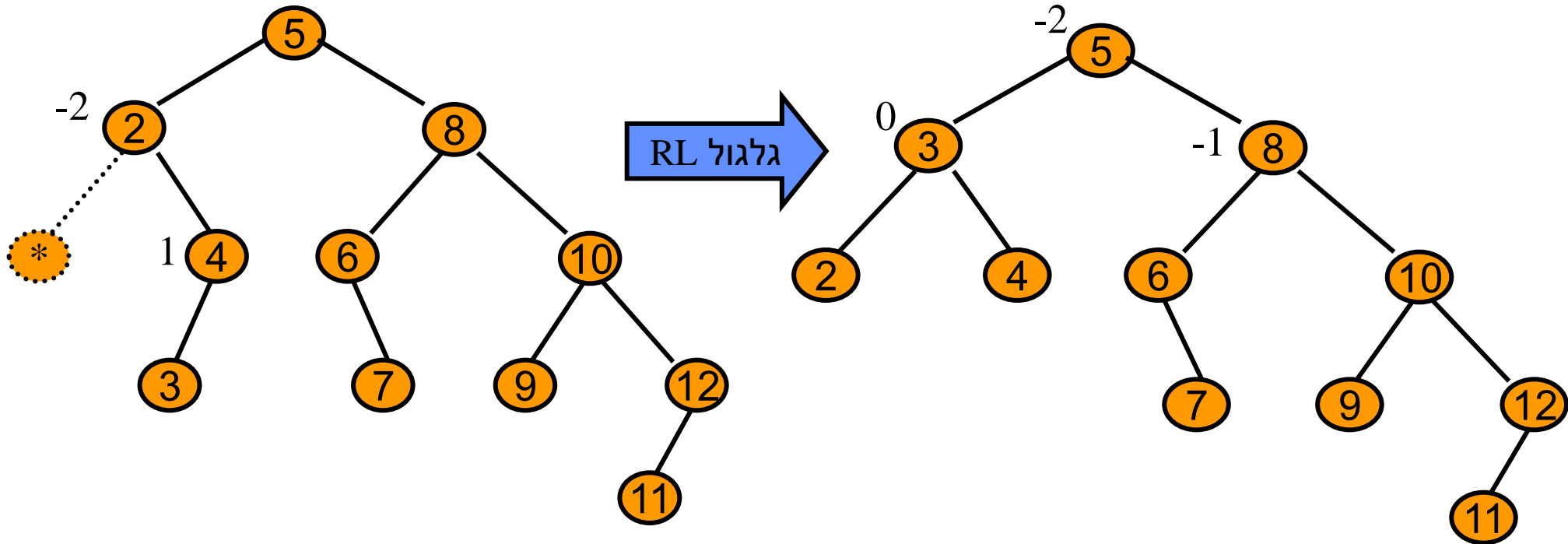
- עדכן את $BF(v)$
- אם $|BF(v)| = 2$, בצע גלגול והמשך כלפי מעלה.
- אם גובה תת העץ ששורשו v לא השתנה, סיים.
- אם גובה תת העץ השתנה ו- $BF(v)$ תקין, המשך כלפי מעלה.

בהוצאה יתכן יותר מגלגול אחד.

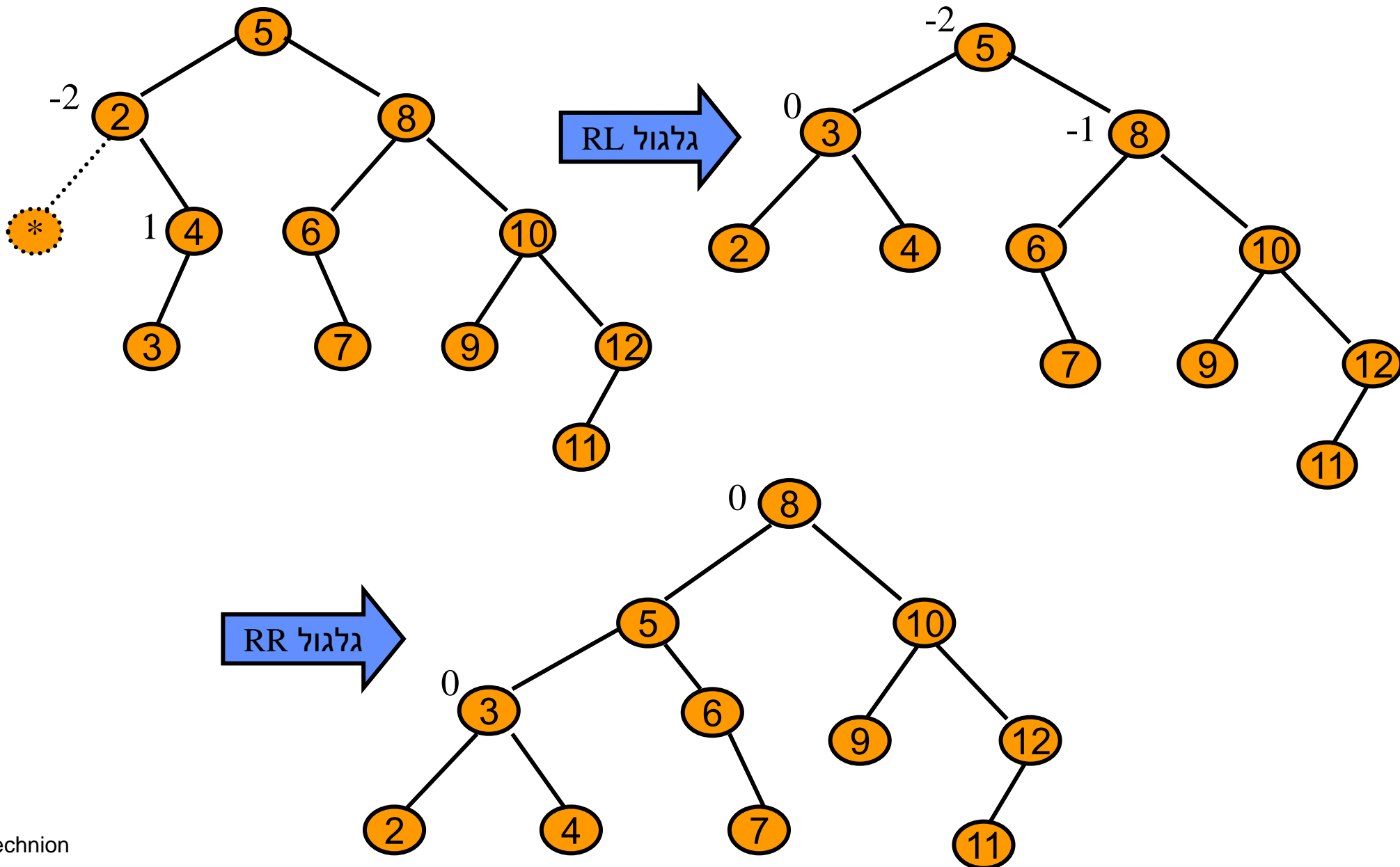
דוגמא להוצאה מעץ AVL



דוגמא להוצאה מעץ AVL



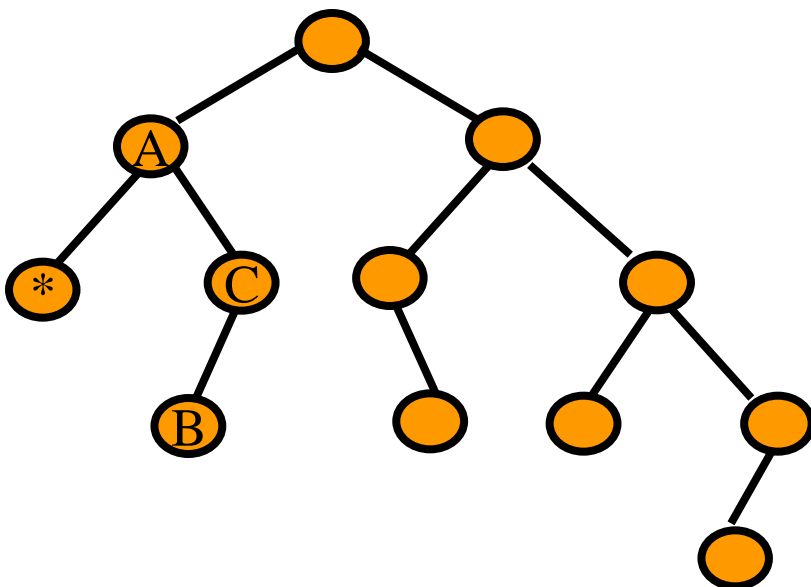
דוגמא להוצאה מעץ AVL



דוגמא: הוצאה מעץ פיבונצי

בהוצאה יתכן גלגול בכל צומת על המסלול בין הצומת המוצא ובין השורש.

לדוגמא כאשר מוציאים עלה ראשון מעץ פיבונצי - F_i .



תרגיל לבית: מהי סדרת הגלגולים המתבצעת כאשר מוציאים עלה ראשון מעץ פיבונצי - F_i .

זמן ההוצאה מעץ AVL

$O(h)$ מציאת המקום הדרוש להוצאה

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$ (אם מופר)

$O(h)$ תיקון האיזון

(לכל היותר פעם בכל רמה)

$O(h) = O(\log n)$ סה"כ

עצי AVL מאפשרים חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן $O(\log n)$

זמן ההוצאה מעץ AVL

$O(h)$ מציאת המקום הדרוש להוצאה

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$ (אם מופר)

$O(h)$ תיקון האיזון

(לכל היותר פעם בכל רמה)

$O(h) = O(\log n)$ סה"כ

עצי AVL מאפשרים חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן $O(\log n)$

ראו הדגמה באתר הקורס (בחרו AVL tree animation):

<http://www.cs.technion.ac.il/~cs234218>

Fun movie demonstration

(Building an AVL tree of height 8 - YouTube)

<http://www.youtube.com/watch?v=JbibvS1S7N0>