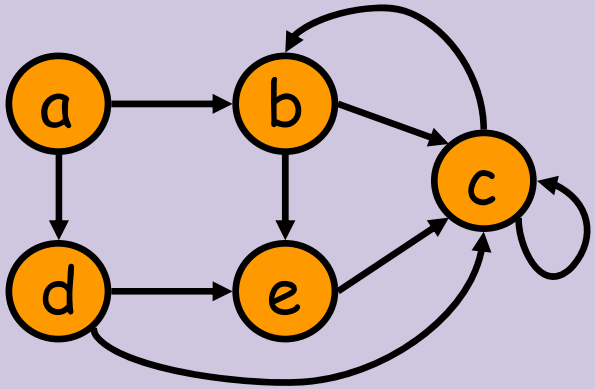
גרפים מכוונים (Directed Graphs)

גרף מכוון הוא זוג (V,E) המורכב מקבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E.
$E \subseteq V \times V$



חוג עצמי

$V = \{a,b,c,d,e\}$

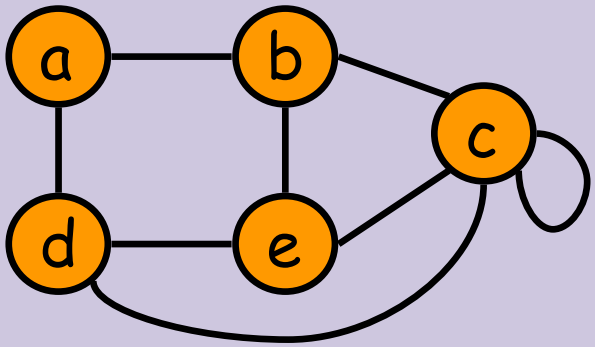
$E = \{(a,b),(a,d),(b,c),(b,e),(c,b),(c,c),(d,c),(d,e),(e,c)\}$

נסמן $n = |V|$ וכן $m = |E|$. בדוגמא: $n = 5$, $m = 9$.

©Geiger & Itai, 2001

גרפים לא-מכוונים (Undirected Graphs)

גרף לא-מכוון הוא זוג (V,E) המורכב מקבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E.
קשת ב-E היא קבוצה בת שני איברים מתוך V. קשת מסומנת ע"י (i,j)
(במקום הסימון המדויק יותר {i,j}).



חוג עצמי

V = {a,b,c,d,e}

E = {(a,b),(a,d),(b,c),(b,e),(c,c),(d,c),(d,e),(e,c) }

נסמן $n = |V|$ וכן $m = |E|$. בדוגמא: $n = 5$, $m = 8$.

מספר הקשתות m קטן בכל גרף לא מכוון מ- n^2 .

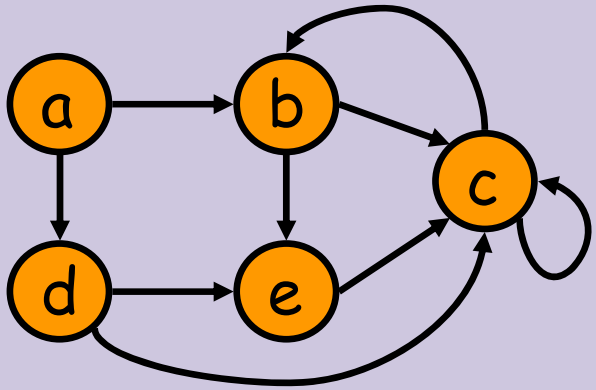
©cs,Technion

ייצוג גרף מכוון במטריצת סמיכויות (Adjacency Matrix)

נגדיר מטריצה בולאנית A בגודל $n \cdot n$ כך שיתקיים:

$A[i,j] = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$ (ואחרת - $A[i,j] = 1$)

דוגמא:



	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1
c	0	1	1	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	1	0	0

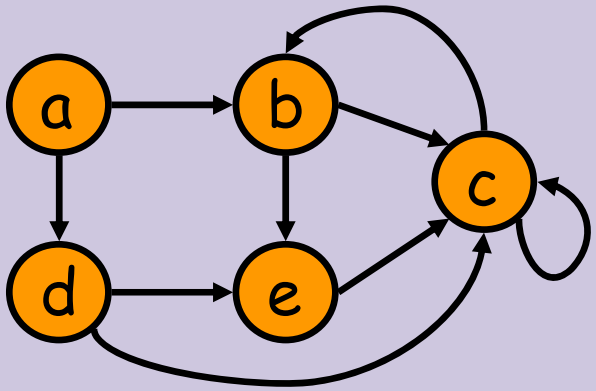
גרף לא- מכוון: אפשר לייצג באופן דומה (המטריצה סימטרית!)

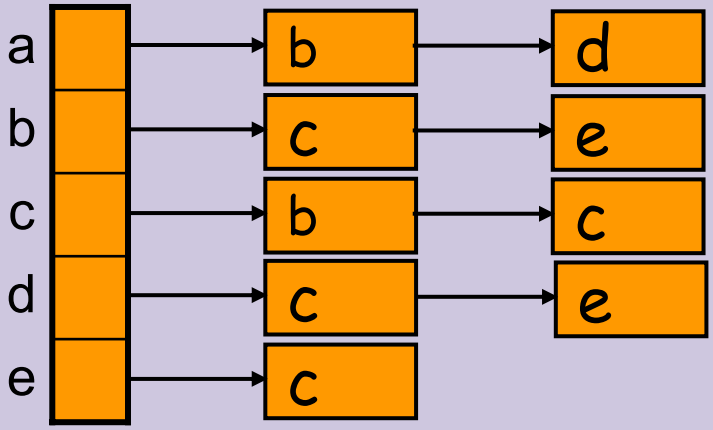
©cs,Technion

ייצוג גרף מכוון ברשימות סמיכויות (Adjacency lists)

לכל צומת נשמור את רשימת הצמתים אליהם הוא מצביע.

דוגמא:



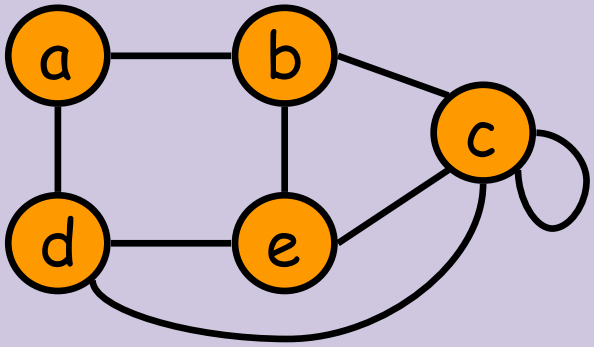


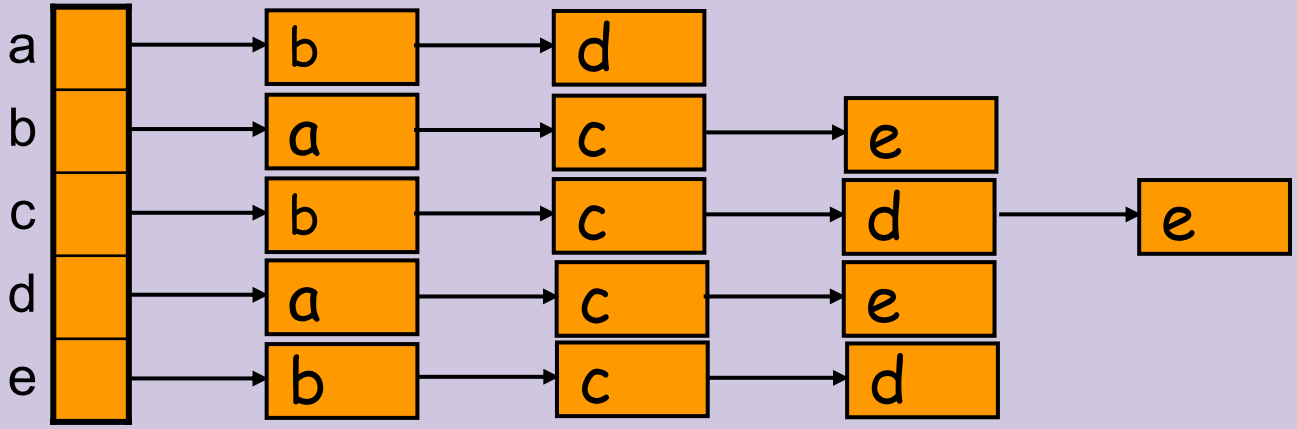
©cs,Technion

ייצוג גרף לא-מכוון ברשימות סמיכויות

לכל צומת נשמור את רשימת הצמתים הסמוכים אליו.

דוגמא:

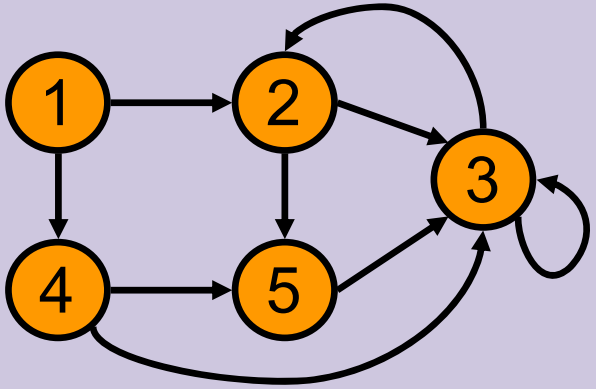




כל קשת מופיעה פעמיים (מלבד חוגים עצמיים).

©cs,Technion

מיון קשתות



נתונה רשימה לא ממוינת של קשתות.

מטרה: בנו רשימות סמיכויות ממוינות בזמן $O(n+m)$.

$E = \{(5,3),(2,3),(4,5),(4,3),(3,2),(1,2),(3,3),(1,4),(2,5)\}$

נתונות m קשתות כאשר כל קשת היא זוג מספרים בטווח n ... 1 .

פתרון: נבצע Radix Sort כאשר הבסיס הוא n.

מיון לפי "ספרה" ימנית

	(3,3)		
	(4,3)		
(1,2)	(2,3)		(2,5)
(3,2)	(5,3)	(1,4)	(4,5)

מיון לפי "ספרה" שמאלית

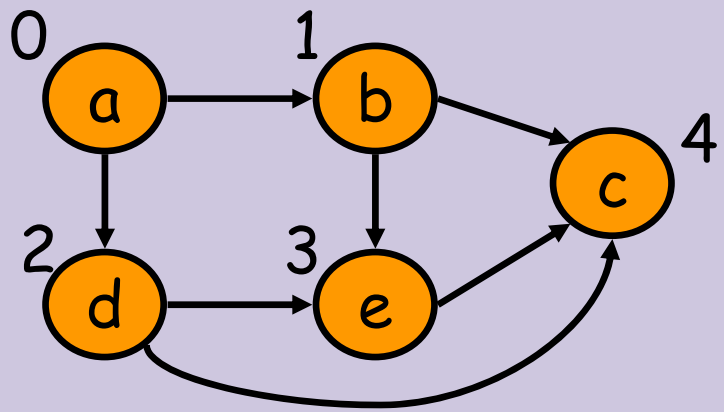
(1,4)	(2,5)	(3,3)	(4,5)	
(1,2)	(2,3)	(3,2)	(4,3)	(5,3)

מיון טופולוגי

קלט: גרף מכוון.

פלט: מספור של צמתי הגרף - לצומת i יינתן המספר N[i] - כך שיתקיים:

$(i,j) \in E \Rightarrow N[i] < N[j]$ או הודעה שלא קיים מספור כזה.

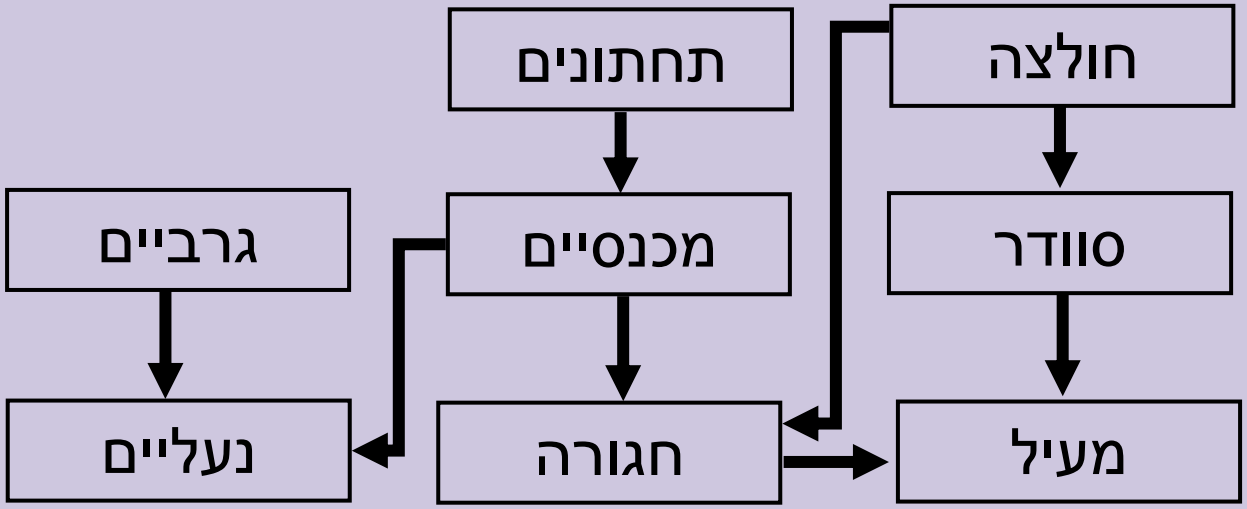


מתי ניתן למצוא מספור כזה ?

©cs,Technion

דוגמא: כיצד נתלבש בבוקר?

אילוצים (כמעט) הכרחיים בתהליך ההתלבשות:

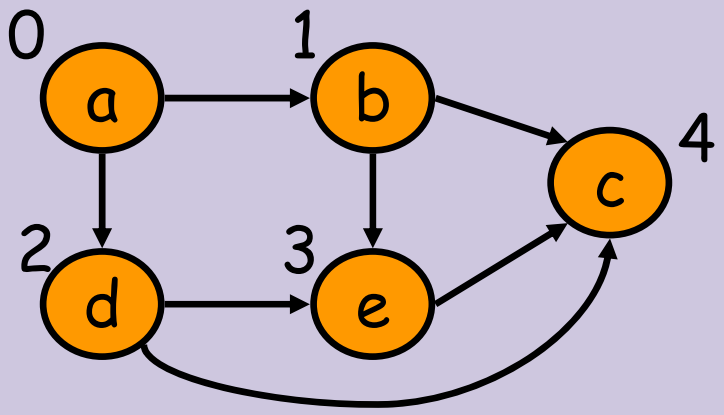


מיונים טופולוגים אפשריים?

1. תחתונים, גרביים, מכנסיים, חולצה, חגורה, נעליים, סוודר מעיל
2. גרביים, נעליים, חולצה, סוודר, מעיל, תחתונים, מכנסיים, חגורה
3. חגורה, נעליים, מעיל, גרביים, סוודר, מכנסיים, חולצה, תחתונים

©cs,Technion

מיון טופולוגי



מתי ניתן למצוא מספר כזה ?

כאשר הגרף הוא DAG (Directed Acyclic Graph =)

הגדרה: מקור הוא צומת שלא נכנסות אליו קשתות.

אבחנה: לכל DAG יש לפחות מקור אחד.

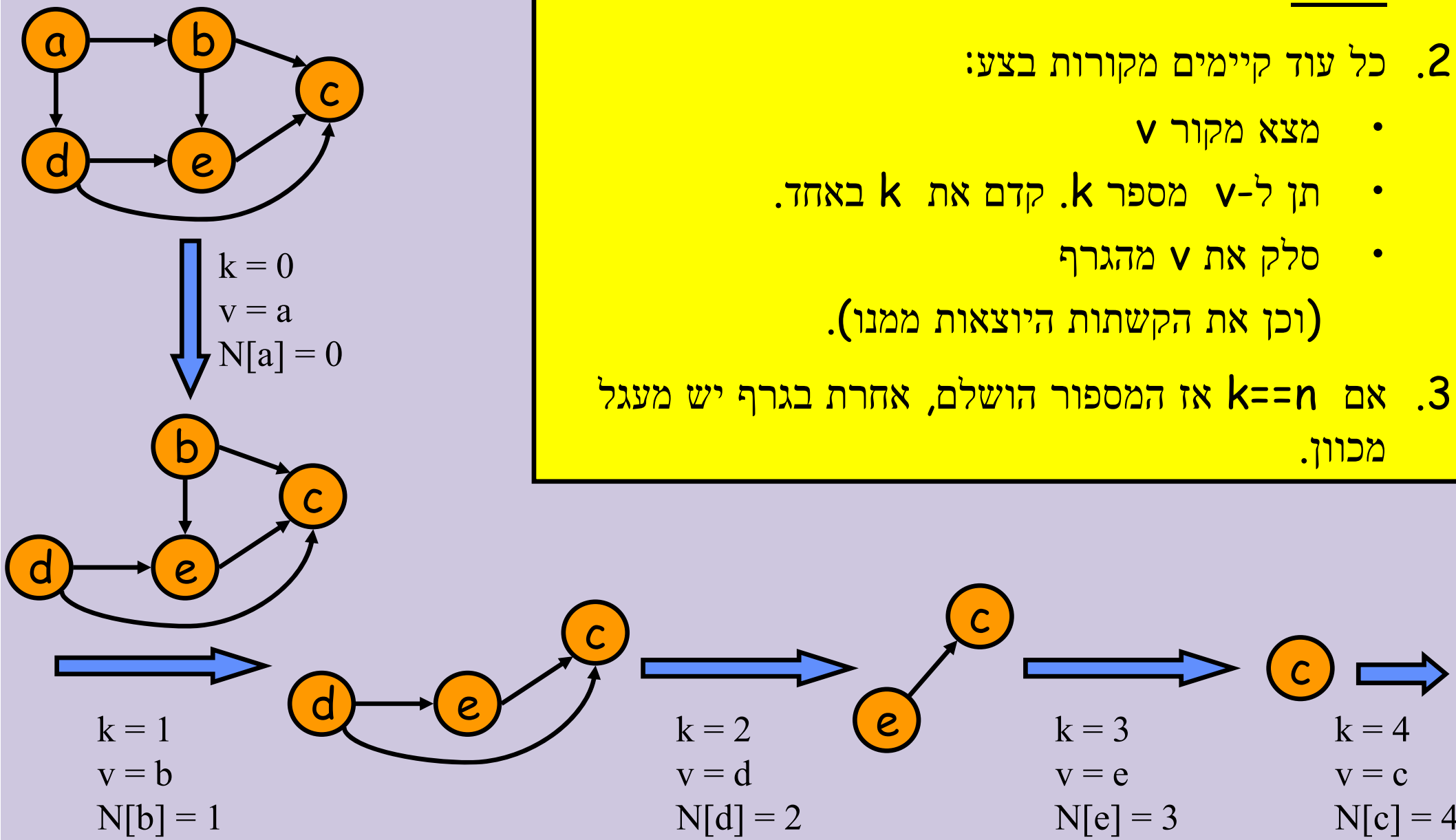
©cs,Technion

אלגוריתם למיון טופולוגי

1. אתחול: k = 0.
2. כל עוד קיימים מקורות בצע:
   - מצא מקור v
   - תן ל-v מספר k. קדם את k באחד.
   - סלק את v מהגרף

   (וכן את הקשתות היוצאות ממנו).
3. אם k==n אז המספור הושלם, אחרת בגרף יש מעגל מכוון.

דוגמא



מבני נתונים למיון טופולוגי

1. אתחול: k = 0.
2. כל עוד קיימים מקורות בצע:
   - מצא מקור v
   - תן ל-v מספר k. קדם את k באחד.
   - סלק את v מהגרף (וכן את הקשתות היוצאות ממנו).
3. אם k==n אז המספור הושלם, אחרת בגרף יש מעגל מכוון.

הפעולות הנדרשות

מצא מקור

סלק מקור

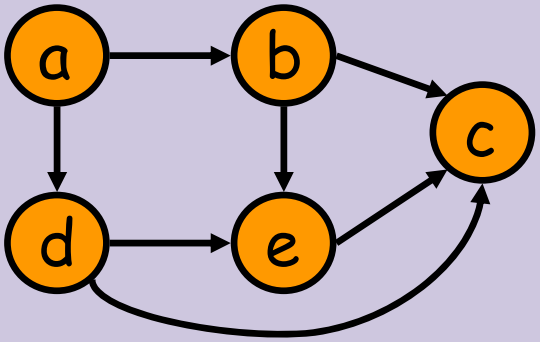
מימוש 1 בייצוג מטריצת סמיכויות

מימוש 2 בייצוג רשימת סמיכויות

©cs,Technion

מימוש בייצוג מטריצת סמיכויות

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	1	0	0



מימוש הפעולות הנדרשות

מצא מקור: כדי לבדוק האם צומת i מקור, נבדוק שעמודה i כולה אפסים. זמן $O(n)$.

כדי למצוא מקור נבדוק את כל הצמתים. סה"כ $O(n^2)$.

סלק מקור i: אפס שורה i. (העמודה כבר מאופסת כיון שמסלקים מקור). זמן $O(n)$.

זמן כללי: האלגוריתם מבצע n פעמים את זוג הפקודות "מצא מקור" ו"סלק מקור". לפיכך סיבוכיות הזמן היא $O(n^3)$.

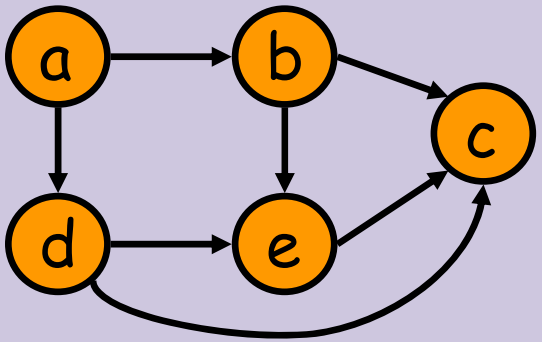
צוואר הבקבוק במימוש זה היא פעולת "מצא מקור" המתבצעת n פעמים.

©cs,Technion

מימוש בייצוג מטריצת סמיכויות (שיפור)

בכל השיפורים נבצע עבוד מקדים (Preprocessing). בחישוב זמן הריצה נוסיף את זמן העיבוד המוקדם לזמן ריצת האלגוריתם.

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	1	0	0



בנה מערך in-degree[i] ובו נשמור את מספר הקשתות הנכנסות לצומת i. זמן הבניה $O(n^2)$.

<u>מימוש הפעולות הנדרשות</u>

<u>מצא מקור</u>: כדי לבדוק האם צומת i מקור, נבדוק in-degree[i]=0. זמן $O(1)$.

כדי למצוא מקור נבדוק את כל הצמתים. סה"כ $O(n)$.

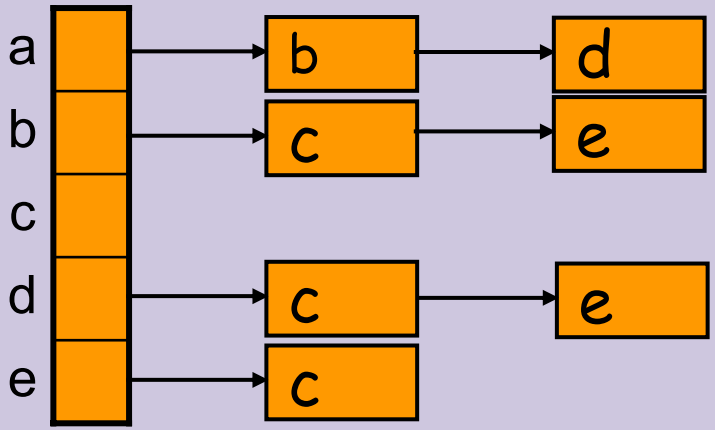
<u>סלק מקור i</u>: אפס שורה i.

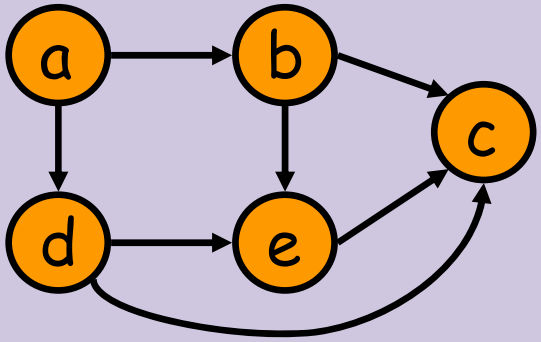
לכל $A[i,j]=1$ הקטן באחד את in-degree[j]. זמן $O(n)$.

<u>זמן כללי</u>: האלגוריתם מבצע n פעמים את זוג הפקודות "מצא מקור" ו"סלק מקור". לפיכך סיבוכיות הזמן היא $O(n^2)$.

©cs,Technion

מימוש בייצוג רשימת סמיכויות





מימוש הפעולות הנדרשות

מצא מקור: כדי לבדוק האם צומת i מקור, נעבור על כל הרשימות. אם הצומת לא נמצא אז הוא מקור. זמן $O(m)$.

כדי למצוא מקור נבדוק את כל הצמתים. סה"כ $O(n \cdot m)$.

סלק מקור i: סמן שצומת i סולק. זמן $O(1)$.

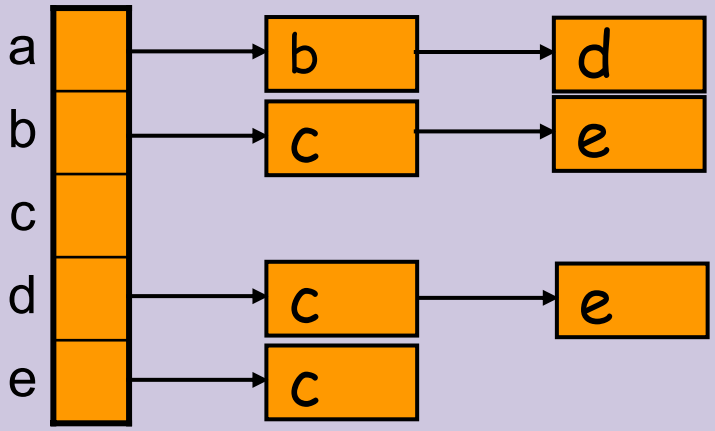
זמן כללי: האלגוריתם מבצע n פעמים את זוג הפקודות "מצא מקור" ו"סלק מקור". לפיכך סיבוכיות הזמן היא $O(n^2 \cdot m)$.

שיפור ראשון:

מצא מקור: כדי למצוא מקור נעבור על כל הרשימות ונשמור מערך בולאני ובו 1 לכל צומת בו נתקלנו ו- 0 אחרת. זמן $O(n+m)$. לפיכך זמן כללי $O(n(n+m))$.

©cs,Technion

מימוש בייצוג רשימת סמיכויות (שיפור)

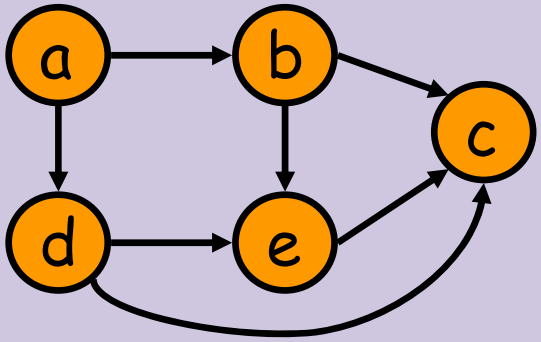


שיפור שני: נבנה ונשמור in-degree[i].

בנית in-degree[i] ע"י מעבר על כל הרשימות וספירת הפעמים שכל צומת מופיע. זמן $O(n+m)$.

מצא מקור: עבור על המערך in-degree בזמן $O(n)$.

סלק מקור i: עבור על הרשימה ה- i ועדכן את המערך in-degree. זמן $O(\text{out-degree}(i))$.

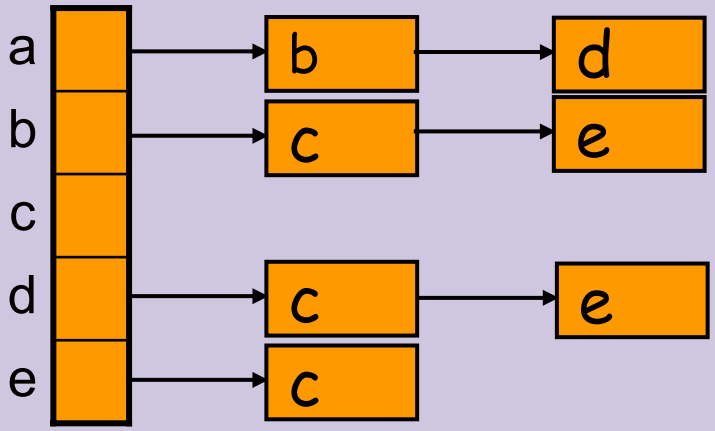


זמן כללי: האלגוריתם מבצע n פעמים את זוג הפקודות "מצא מקור" ו"סלק מקור". לפיכך סיבוכיות זמן היא:

$$\sum_{i=1}^{n} O(n+\text{outdegree}(i)) = O\left(n^2 + \sum_{i=1}^{n} \text{outdegree}(i)\right) = O(n^2+m) = O(n^2)$$

©cs,Technion

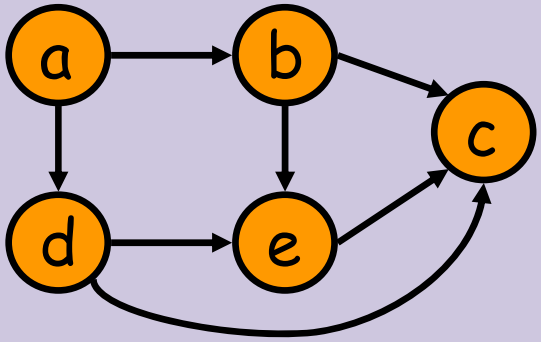
מימוש בייצוג רשימת סמיכויות (שיפור)



שיפור שלישי: נשמור צמתים עבורם מתקיים in-degree[i]=0 במחסנית, תור, או רשימה.

בנית in-degree[i] ע"י מעבר על כל הרשימות וספירת הפעמים שכל צומת מופיע. כמו קודם. זמן $O(n+m)$.

מצא מקור: איבר ראשון במחסנית. זמן $O(1)$.



סלק מקור i: עבור על הרשימה ה- i ועדכן את המערך in-degree. הכנס למחסנית איברים עבורם דרגת הכניסה מתאפסת.
זמן $O(\text{out-degree}(i))$.

זמן כללי:

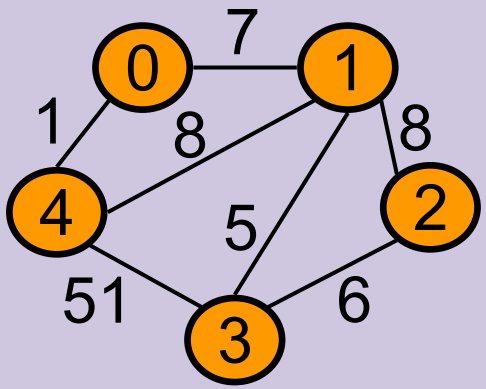
$$\sum_{i=1}^{n} O(1+\text{outdegree}(i)) = O(n+\sum_{i=1}^{n}\text{outdegree}(i)) = O(n+m)$$

©cs,Technion

גרפים ממושקלים

גרף יקרא <u>ממושקל</u> אם לכל קשת e בקבוצה E קיים משקל חיובי w(e).

נתמקד בגרפים ממושקלים לא-מכוונים. גרפים אלה ניתן לייצג בעזרת מטריצת סמיכויות סימטרית או רשימות סמיכויות.



דוגמא:

$$A[i,j] = \begin{cases} 0 & e \notin E \\ w(i,j) & \text{אחרת} \end{cases}$$

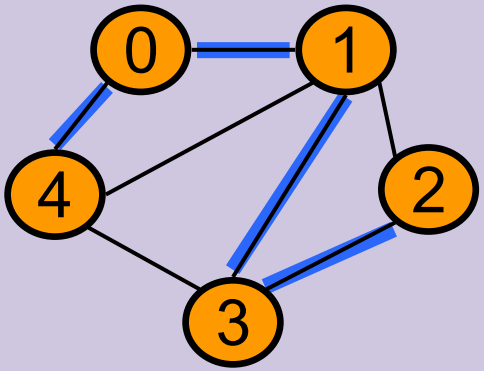
	0	1	2	3	4
0	0	7	0	0	1
1		0	8	5	8
2			0	6	0
3				0	51
4					0

מטריצה A ממומשת ע"י ייצוג של מטריצה סימטרית. האלכסון מציין חוגים עצמיים. מספר האיברים הנדרש הוא n(n+1)/2.

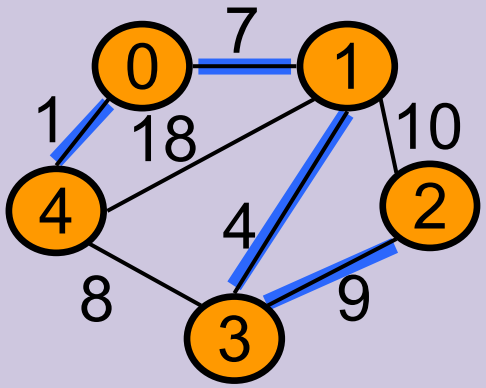
©cs,Technion

עץ פורש מינימום

עץ פורש של גרף לא-מכוון G הוא עץ שצמתיו הם הצמתים של G וקשתותיו הן קשתות של G.



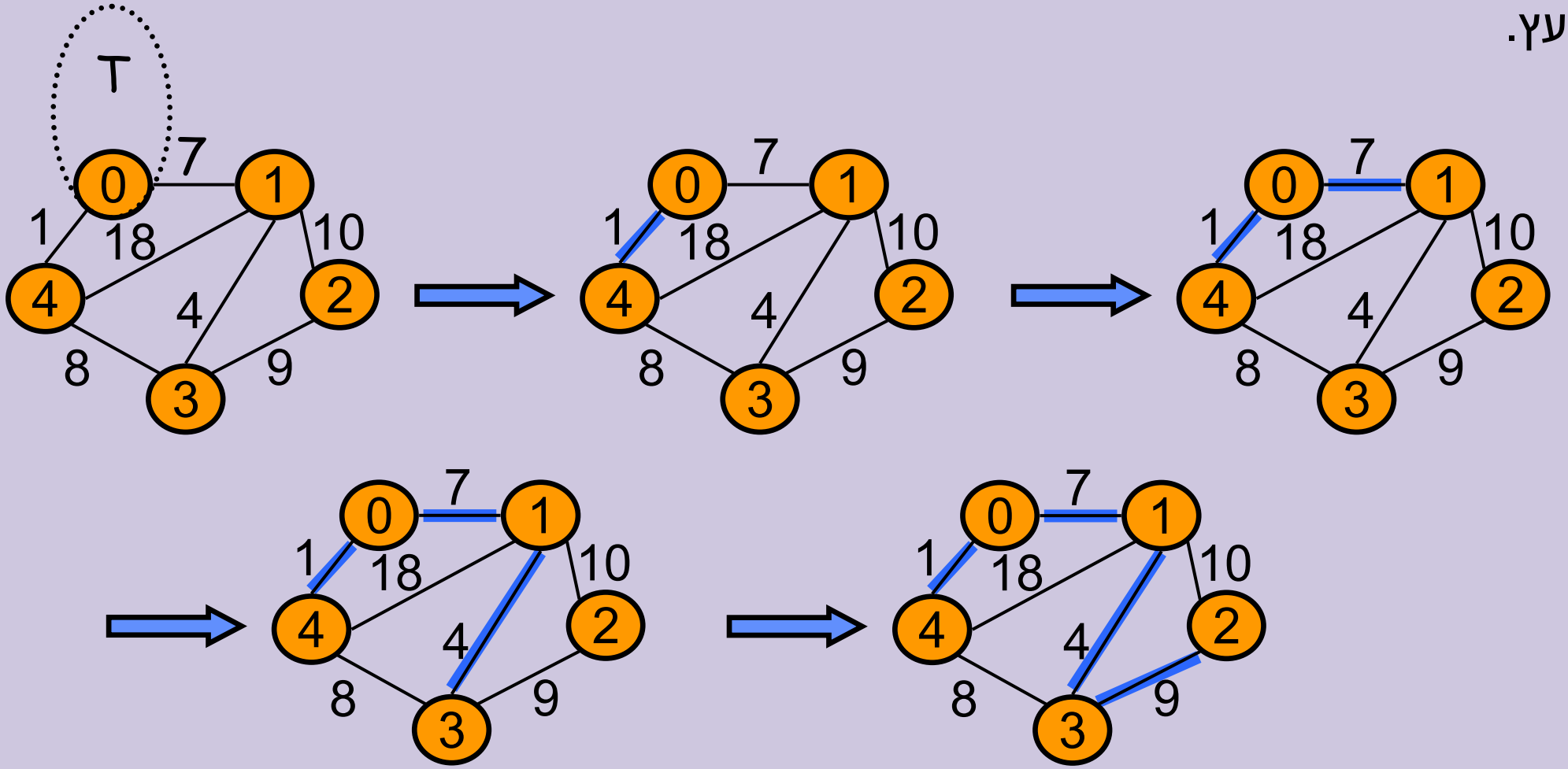
<u>עץ פורש מינימום</u> של גרף ממושקל לא-מכוון G הוא עץ פורש של G שסכום משקלי קשתותיו מינימלי.



©cs,Technion

מציאת עץ פורש מינימום

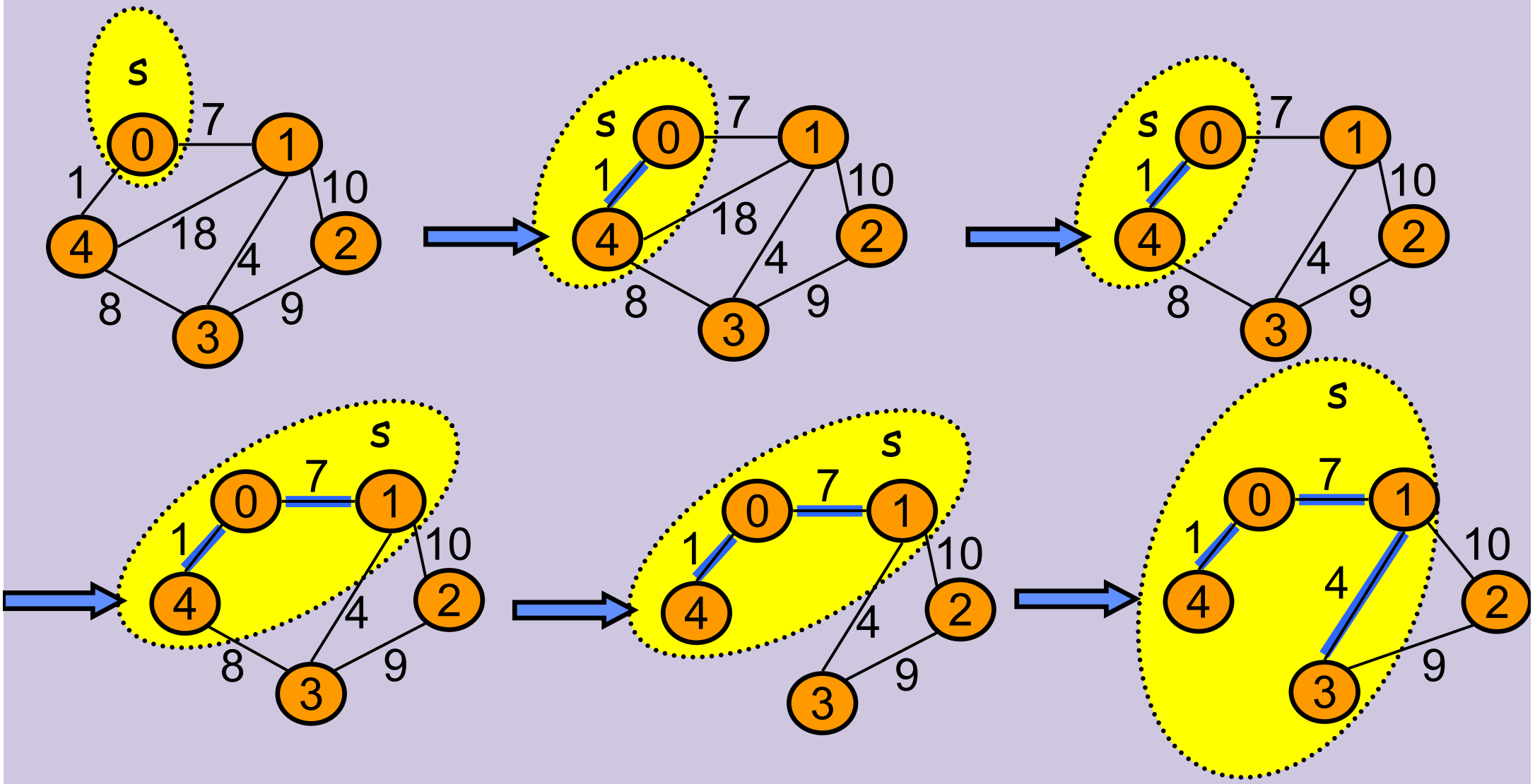
רעיון (Prim): הכנס צומת כלשהו לעץ T. בכל שלב מצא קשת בעלת משקל מינימלי המחברת בין צומת מהעץ T הנוכחי לצומת בשאר הגרף והוסף קשת זו לעץ.



הערה: כמובן שיש להוכיח את נכונות האלגוריתם (ראו פרק 24), אך אנו נתרכז בפרטי המימוש בלבד.

צעד ראשון לקראת מימוש

רעיון: בכל שלב נבחר קשת (s,i) להכנסה לעץ T ונשנה את הגרף המקורי על ידי איחוד הצומת s והצומת i לצומת בודד ששמו s ועדכון הקשתות היוצאות מצומת זה.



אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימום (Prim)

איתחול: בחר צומת התחלה כלשהו s. הכנס את s לקבוצת צמתי העץ V_T. צור קבוצה ריקה E_T עבור קשתות העץ.

כל עוד קיימות קשתות היוצאות מהצומת s בצע:

1. מצא קשת (s,i) בעלת משקל מינימלי.
2. הוסף קשת (s,i) לקבוצה E_T (עם הקצוות המקוריים) ואת הצומת i לקבוצה V_T.
3. (עדכן את G) סלק צומת i ואת הקשתות הסמוכים ל- i מהגרף G.

לכל קשת (i,j) מלבד הקשת (i,s) בצע:

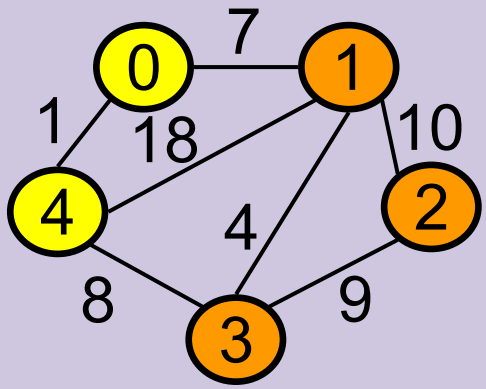
1. אם הקשת (s,j) לא נמצאת ב- G אז הוסף אותה עם המשקל w(i,j)
2. אם הקשת (s,j) נמצאת ב- G ומתקיים w(i,j) < w(s,j), אז הקטן את משקלה של (s,j) להיות w(i,j).

©cs,Technion

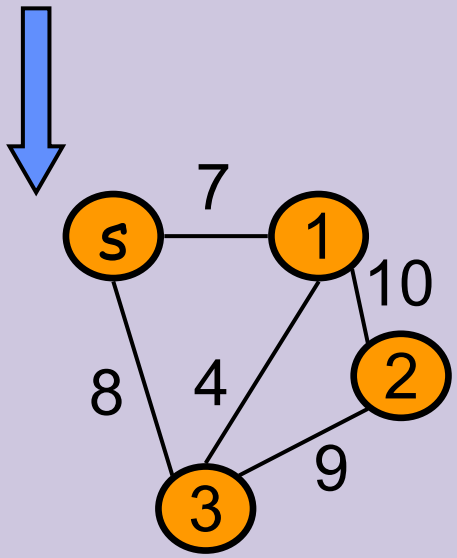
מימוש עבור גרף נתון במטריצת סמיכויות

s =

	0	1	2	3	4
0	-	7	-	-	1
1	7	-	10	4	18
2	-	10	-	9	-
3	-	4	9	-	8
4	1	18	-	8	-



	0	1	2	3	4
0	-	7	-	8	
1	7	-	10	4	
2	-	10	-	9	
3	-	4	9	-	



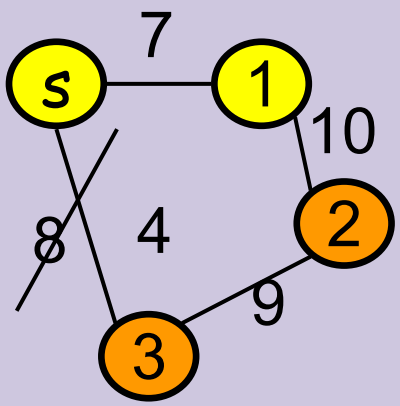
הפעולות

מציאת קשת קלה ביותר היוצאת מצומת s: ע"י מעבר על השורה המתאימה לצומת s.

סילוק צומת i: ע"י מיזוג שורה i עם השורה של צומת s.

מימוש עבור גרף נתון במטריצת סמיכויות

	0	1	2	3	4
0	-	7	-	8	
1	7	-	10	4	
2	-	10	-	9	
3	-	4	9	-	



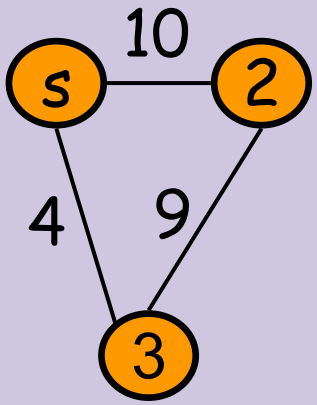
<u>זמנים</u>

<u>מציאת קשת קלה ביותר</u>

<u>היוצאת מצומת s</u>: ע"י מעבר על השורה המתאימה לצומת s.

זמן $O(n)$.

	0	1	2	3	4
0	-		10	4	
1					
2	10		-	9	
3	4		9	-	

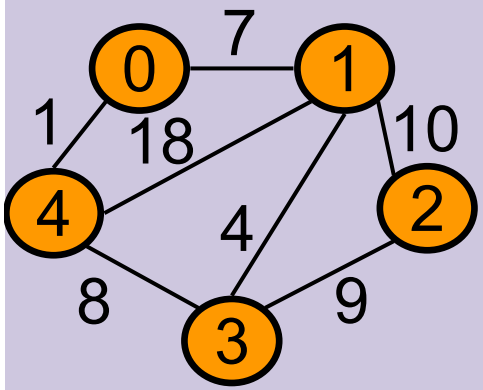


<u>סילוק צומת i</u>: ע"י מיזוג שורה i עם השורה של צומת s. זמן $O(n)$.

סה"כ $O(n^2)$.

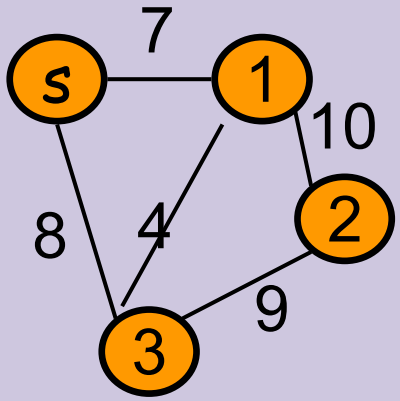
מימוש עבור גרף נתון ברשימת סמיכויות

נניח שרשימות הסמיכויות ממוינות (ע"פ השכן), או נמיינן בזמן $O(n+m)$.



מציאת קשת קלה ביותר היוצאת מצומת s: ע"י מעבר על רשימת הסמיכויות המתאימה לצומת s.

סילוק צומת i: ע"י מיזוג רשימת הסמיכויות של צומת i עם רשימת הסמיכויות של צומת s.



ניתוח זמנים

בכל שלב מוצאים קשת קלה ביותר בזמן $O(n)$(אורך מקסימלי של רשימת סמיכויות של s).

בכל שלב משלבים שתי רשימות ממוינות– זו המתאימה לצומת i וזו המתאימה לצומת s.

הזמן הנדרש הוא אורך הרשימות, כלומר $O(n)$.

סה"כ $O(n^2)$.

שיפורים

נשמור את הקשתות היוצאות מצומת s בערימה. זמן מציאת קשת קלה ביותר היוצאת מצומת s יהיה $O(1)$.

נשמור את רשימת הסמיכויות של צומת s במערך $A[i]=w(s,i)$. זמן עדכון למזוג צומת i עם צומת s יהיה $O(degree(i))$ כיוון שפשוט נעבור על רשימת הסמיכויות של צומת i ולכל צומת j המופיע בה נעדכן את $A[j]$.

ניתוח זמנים

מהן הפעולות המתבצעות על הערימה ?

בכל שלב:	זמן הפעולה
•מוצאים מינימום	$O(1)$
•קשתות נוספות לערימה	$O(\log n)$
•קשתות מוצאות מהערימה	$O(\log n)$
•משנים משקל של קשת בערימה	$O(\log n)$
כמו כן בכל שלב מעדכנים את A	$O(degree(j))$

כל קשת נכנסת לערימה או גורמת עדכון פעם אחת לכל היותר.

לכן פעולות הערימה מתבצעות בזמן $O(m \log n)$.

פעולות העדכון של A מתבצעות בזמן כולל של $O(m)$ (סכום הדרגות).

מתי השיפור עוזר (יחסית לזמן $O(n^2)$)?

שיפור נוסף אפשרי

בעזרת ערימות פיבונצי ניתן לשפר לזמן $O(m + n \log n)$.

לגרפים דלילים ניתן להגיע אף לסיבוכיות זמן $O(m \log^* n)$.

ליתר דיוק זמן $O\left(m\beta\left(n,m\right)\right)$

כאשר $\beta(n,m) = \min\left\{i : \log^{(i)} n \le 2m/n\right\}$

פרטים בספר הלימוד פרק 24.

למתקדמים: ניתן לקבל אלגוריתם רנדומאלי, בתוחלת זמן $O(m)$.