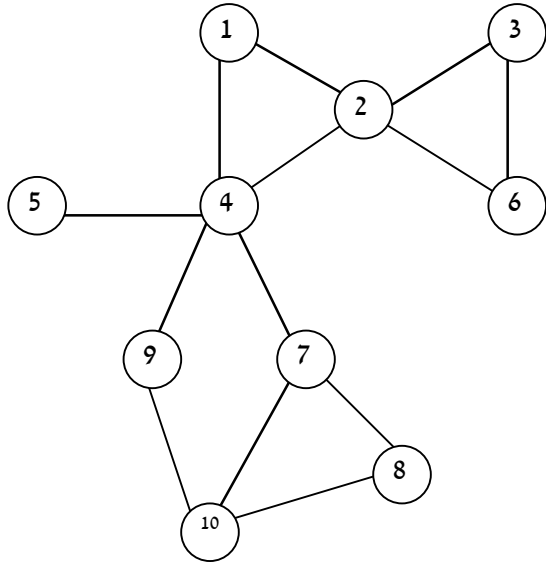


אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגול מס' 9 (חורף '01)

נושא התרגול: צמתי הפרדה ורכיבים בלתי-פריקים



הגדרות

צומת v יקרא צומת הפרדה בגרף G אם קיימים עבורו שני צמתים $a, b \neq v$ כך שכל המסלולים בין a ל- b בגרף עוברים דרך v .

לדוגמא: צומת v_2 (מפרידה בין v_1, v_3).

צומת v_4 (מפרידה בין v_{10}, v_3).

רכיב בלתי-פריק בגרף G הוא תת-גרף מקסימלי ב- G (רכיב) שאין בו צמתי הפרדה.

בדוגמא: $\{v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_4\}$

$\{v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}, \{v_4, v_5\}$

תרגיל

הוכח: שני צמתים בגרף פשוט נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק בגודל 3 לפחות אם"מ הם על מעגל פשוט.

הוכחה

כיוון \Rightarrow

נתון: שני צמתים בגרף נמצאים על מעגל פשוט.

אזי, במעגל יש לפחות 3 צמתים (אחרת לא היה מעגל). במעגל אין צמתי הפרדה (כי יש שני מסלולים זרים בין כל זוג צמתים) ולכן חייב להיות רכיב בלתי-פריק שמכיל אותו. מ.ש.ל.

כיוון \Leftarrow

נתון: $u, v \in V$ נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק בגודל 3 לפחות.

צ"ל: u, v נמצאים על מעגל פשוט.

הוכחה באינדוקציה על המרחק בין u ל- v :

בסיס:

אם u, v שכנים אזי קיימת קשת (u, v) בגרף.

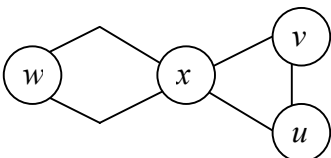
u, v נמצאים באותו רכיב-בלתי פריק וברכיב שכזה אין צמתי הפרדה ולכן:

- u אינו צומת הפרדה \Leftarrow קיים מסלול פשוט מ- v לכל צומת אחר ברכיב שאינו עובר דרך u .
- v אינו צומת הפרדה \Leftarrow קיים מסלול פשוט מ- u לכל צומת אחר ברכיב שאינו עובר דרך v .

מכיוון שהרכיב הבלתי-פריק בגודל 3 לפחות, ניתן לבחור צומת $w \neq u, v$ ברכיב.

נסמן ב- x את הצומת הראשון המשותף למסלולים $u - w, v - w$.

המסלול $u - x - v - u$ הוא מעגל פשוט.



צעד האינדוקציה :

נניח נכוונות עבור מרחק k בין u ל- v ונוכיח עבור מרחק $k+1$:

u, v נמצאים במרחק $k+1$ ברכיב \Leftarrow קיים מסלול $u - \dots - w - v$ באורך $k+1$.

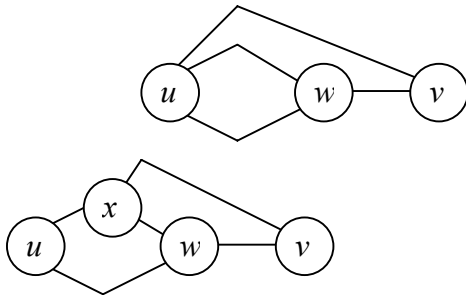
יהי w הצומת השכן ל- v במסלול זה.

מכיוון ש- u, v נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק אזי לא קיים במסלול שביניהם אף צומת הפרדה \Leftarrow גם w נמצא באותו רכיב בלתי-פריק.

u, w נמצאים על אותו רכיב בלתי פריק (בגודל 3 לפחות) והמרחק ביניהם k . לכן, עה"א הם נמצאים על מעגל פשוט. אם v נמצא על אותו מעגל – הרי ש- u, v נמצאים על מעגל פשוט – מ.ש.ל.

אחרת, v לא נמצא על אותו מעגל פשוט. מכיוון ש- w איננו צומת הפרדה, קיים מסלול נוסף, p , בין u ל- v שאינו עובר דרך w .

נבחין בין שני מקרים :



• המסלול p זר למעגל הפשוט :
אזי המסלול $u - w - v - u$ מעגל פשוט.

• המסלול p אינו זר למעגל הפשוט :
יהי צומת x הראשון המשותף למסלול p ולמעגל.
אזי המסלול $u - x - v - w - u$ מעגל פשוט.

מציאת צמתי הפרדה בגרף באמצעות DFS

הגדרה - Lowpoint

אם $K(u)$ הוא הסימון שניתן לצומת u ע"י DFS, אז ה-Lowpoint של צומת v , $L(v)$, היא הסימון הנמוך ביותר $K(u)$ של צומת u אליו ניתן להגיע מ- v באמצעות קשתות עץ (מכוונות) ולכל היותר קשת אחורית אחת (כולל המסלול הריק).

במילים אחרות : $L(v)$ הוא האב הקדמון ביותר אליו ניתן להגיע באמצעות קשתות עץ ולכל היותר קשת אחורית אחת.

טענה 1

צומת פנימי בעץ, u , הוא צומת הפרדה אמ"מ קיימת קשת עץ $u \rightarrow v$ כך שמתקיים $K(u) \leq L(v)$.

טענה 2

שורש העץ הוא צומת הפרדה אמ"מ יש לו לפחות שני בנים בעץ ה-DFS.