

תרגיל

נתון גרף לא-מכוון, קשיר וסופי $G(V, E)$ וצומת $s \in V$.

תן אלגוריתם שמוצא, עבור כל צומת $v \in V$, את אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל- v , המכיל מספר זוגי של קשתות, או ∞ אם לא קיים מסלול כזה.

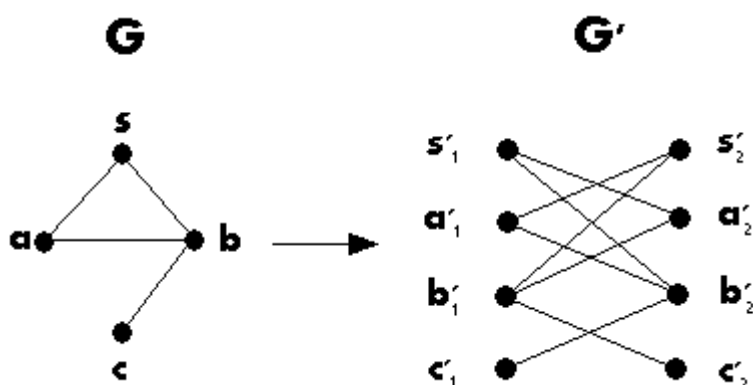
פתרון ע"י רדוקציה

בהנתן הגרף $G(V, E)$ נבנה ממנו גרף חדש $G'(V', E')$ באופן הבא:

עבור כל צומת v ניצור שני צמתים חדשים: v'_1, v'_2 .

עבור כל קשת (a, b) ניצור שתי קשתות חדשות: $(a'_1, b'_2), (a'_2, b'_1)$ (הקשתות לא מכוונות).

דוגמא:



נריץ BFS על G' החל מצומת s'_1 . נסמן ב- $\lambda(v'_1)$ את הערך בסיום ריצת ה-BFS עבור כל צומת v'_1 השייך ל- V' (מסתכלים רק על הצמתים בעלי אינדקס 1).

טענה: $\lambda(v'_1)$ הוא אורך המסלול הזוגי (בעל מספר קשתות זוגי) הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G . כלומר, הראנו אלגוריתם לפתרון התרגיל (יוצרים את הגרף החדש ומריצים עליו BFS).

הוכחה:

יש להראות:

1. אם $\lambda(v'_1) = k < \infty$ אז:

א. k זוגי.

ב. קיים מסלול באורך k (זוגי) מ- s ל- v ב- G .

ג. לכל מסלול באורך זוגי m מ- s ל- v ב- G מתקיים בהכרח $m \geq \lambda(v'_1)$.

2. אם $\lambda(v'_1) = \infty$ אז לא קיים מסלול באורך זוגי מ- s ל- v ב- G .

הוכחת 1.א. + 1.ב.

אם $\lambda(v'_1) = k$ אז מתוך נכונות BFS קיים מסלול קצר ביותר שאורכו k מ- s'_1 ל- v'_1 ב- G' :

$$s'_1 - a'_2 - b'_1 - c'_2 - \dots - v'_1$$

אם נמחק את כל האינדקסים נקבל את המסלול:

$$s - a - b - c - \dots - v$$

שהוא מסלול חוקי מ- s ל- v ב- G עפ"י הצורה שבנינו את G' מתוך G (אם יש קשת בין s'_1 ל- a'_2 ב- G' אז הייתה קשת בין s ל- a ב- G וכן הלאה).

המסלול ב- G' מאורך זוגי משום שהוא מתחיל באינדקס 1, נע לסירוגין בין אינדקס 1 לאינדקס 2 ומסתיים באינדקס 1. המסלול ב- G זהה באורכו למסלול ב- G' לכן גם הוא זוגי וסיימו את הוכחת שני הסעיפים הראשונים.

הוכחת 1.ג.

יהא $v - \dots - z - y - x - s$ מסלול מאורך זוגי m מ- s ל- v ב- G . יש להראות כי $\lambda(v'_1) \leq m$.

עפ"י האופן בו בנינו את G' קיים בו המסלול $v'_1 - \dots - z'_2 - y'_1 - x'_2 - s'_1$ שאורכו m . לכן מתוך נכונות BFS מתקבל כי $\lambda(v'_1) \leq m$.

הוכחת 2.

קיבלנו $\lambda(v'_1) = \infty$. יש להראות שלא קיים מסלול באורך זוגי מ- s ל- v ב- G . נניח בשלילה שקיים מסלול כזה שאורכו m . אזי עפ"י 1.ג. $m \leq \lambda(v'_1) = \infty$.

סיבוכיות האלגוריתם:

יצירת הגרף G' דורשת $O(|V| + |E|)$ משום שיש לעבור על כל הצמתים והקשתות. הגרף קשיר לכן סיבוכיות יצירת G' היא $O(|E|)$. הרצת BFS על הגרף שהתקבל לוקחת $O(|E|) = O(|E'|)$ כלומר סיבוכיות האלגוריתם היא $O(|E|)$.