אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגול מס' 4 (חורף 01')

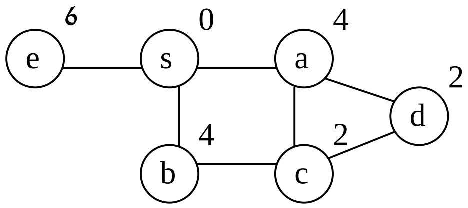
נושא התרגול: BFS

<u>תרגיל</u>

נתון גרף לא-מכוון, קשיר וסופי $G(V,E)$ וצומת $s \in V$.

תן אלגוריתם שמוצא, עבור כל צומת $v \in V$, את אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל-v, המכיל מספר זוגי של קשתות, או ∞ אם לא קיים מסלול כזה.

דוגמא:



<u>פתרון (וריאציה על BFS)</u>

<u>הרעיון</u>: לכל צומת v נצמיד שני סימונים, $\lambda_o(v)$ ו- $\lambda_e(v)$, שיחזיקו את אורך המסלולים האי-זוגי והזוגי הקצרים ביותר לצומת, בהתאמה.

<u>האלגוריתם</u>

<u>אתחול</u>

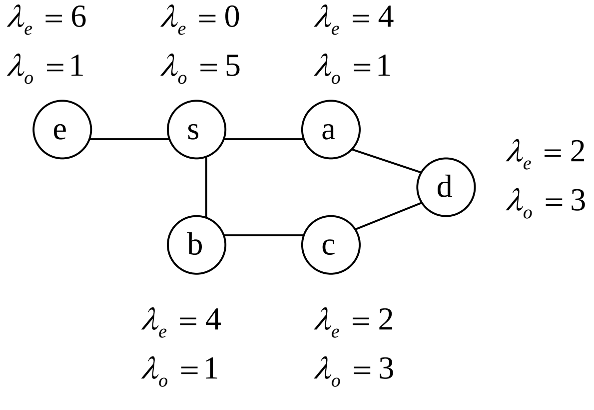
- עבור הצומת s: $\lambda_e(s)=0,\ \lambda_o(s)=\infty$
- עבור כל צומת אחר $v \neq s$: $\lambda_e(v)=\lambda_o(v)=\infty$

<u>לולאה</u> – באיטרציה ה-i (החל מ-$i=1$):

- אם i זוגי:
  לכל צומת $v \in V$ שעבורו $\lambda_o(v)=i-1$:
  לכל שכן u של v שעבורו $\lambda_e(u)=\infty$ עדכן $\lambda_e(u)=i$
- אם i אי-זוגי:
  לכל צומת $v \in V$ שעבורו $\lambda_e(v)=i-1$:
  לכל שכן u של v שעבורו $\lambda_o(u)=\infty$ עדכן $\lambda_o(u)=i$

<u>דוגמא</u>

הרצת האלגוריתם על הגרף הקודם תיתן:



הוכחת נכונות האלגוריתם

<u>האלגוריתם עוצר</u> – כל קשת בגרף נסרקת לכל היותר פעמיים (משני הכיוונים) לעדכון λ_o ולכל היותר פעמיים לעדכון λ_e. לכן זמן הריצה תחום ע"י מספר הקשתות בגרף ($O(|E|)$).

נראה שבסיום הריצה מתקיים, עבור כל צומת v בגרף, אחד התנאים הבאים:

1. אם $\lambda_e(v) = \infty$ אז לא קיים מסלול באורך זוגי מ-s ל-v.
2. אם $\lambda_e(v) = k$ אז:
   א) קיים מסלול באורך זוגי k מ-s ל-v.
   ב) כל מסלול אחר באורך זוגי l מ-s ל-v מקיים $k \le l$.

<u>הוכחה</u>

1. נתון $\lambda_e(v) = \infty$.

נניח בשלילה שקיים מסלול באורך זוגי מינימלי k מ-s ל-v: $s = v_0 \to v_1 \to ... \to v_k = v$

באינדוקציה על מספר האיטרציה i באלגוריתם, בכל שלב $i > 0$ יעודכן, לכל היותר:

- אם i זוגי - $\lambda_e(v_i)$
- אם i אי-זוגי - $\lambda_o(v_i)$

(אם לא עודכן בשלב ה-i הרי שהסיבה היחידה לכך היא שכבר $\lambda_{o/e}(v_i) \neq \infty$ ולפיכך קיים מסלול זוגי קצר יותר מ-s ל-v, בסתירה לכך ש-k מינימלי)

לכן, $\lambda_e(v_k = v)$ עודכן בשלב ה-k, בסתירה לכך ש- $\lambda_e(v) = \infty$ (מ.ש.ל.).

2. נתון $\lambda_e(v) = k$.

תחילה נראה כי אם $\lambda_e(v) = k$ אז k בהכרח זוגי:

ע"פ הגדרת האלגוריתם, $\lambda_e(v)$ נקבעת לכל היותר פעם אחת:

- עבור הצומת s: $\lambda_e(s) = 0$ נקבעת באתחול
- עבור כל צומת אחר $v \neq s$: $\lambda_e(k) = i$ נקבעת בצעד ה-i רק כאשר i זוגי.

א.

נראה שאם מתקיים $\lambda_e(v) = k$ אז קיים מסלול מ-s ל-v באורך (זוגי) k.

באינדוקציה על k - אורך המסלול:

<u>בסיס</u>: עבור $k = 0$ מתקיים, ע"פ האלגוריתם, רק $\lambda_e(s) = 0$.

<u>צעד</u>: נניח נכונות עבור k, ונראה עבור $k + 2$:

יהי v צומת שקיבל סימון $\lambda_e(v) = k + 2$. קיים צומת v' שנתן את הסימון ל-v, ולכן, ע"פ האלגוריתם, $\lambda_o(v') = k + 1$. קיים צומת v'' שנתן את הסימון ל-v', ולכן, ע"פ

האלגוריתם, $\lambda_e(v'') = k$.

עה״א קיים מסלול באורך (זוגי) k מ-s ל-v'', ובאמצעותו ניתן לבנות מסלול באורך (זוגי) $k+2$ מ-s ל-v: $s \to \ldots \to v'' \to v' \to v$ (מ.ש.ל.)

ב.

נראה שאם קיים מסלול כלשהו באורך זוגי l מ-s ל-v אז בהכרח $\lambda_e(v) \le l$.

באינדוקציה על l - אורך המסלול:

<u>בסיס</u>: מסלול באורך $l = 0$ מתקיים רק מ-s לעצמו ואכן $\lambda_e(s) = 0 \le 0$.

<u>צעד</u>: נניח נכונות עבור l, ונראה עבור $l+2$:

יהי $s \to v$ מסלול באורך $l+2$ מ-s ל-v. יהו v' ו-v'' שני הצמתים הקודמים ל-v במסלול.

אזי המסלול $s \to v''$ הינו באורך l ועה״א מתקיים $\lambda_e(v'') = m \le l$.

בצעד ה-$m+1$ של האלגוריתם – אם $\lambda_o(v') = \infty$ אז הערך יעודכן ל-$\lambda_o(v') = m+1$.

אם $\lambda_o(v') \ne \infty$ הרי שהוא עודכן בצעד קודם לצעד זה ומתקיים $\lambda_o(v') < m+1$.

כלומר, בכל מקרה בסוף צעד זה מתקיים $\lambda_o(v') \le m+1$.

באופן דומה, לאחר הצעד ה-$m+2$ יתקיים $\lambda_e(v) \le m+2$.

ולכן, מכיוון שמתקיים $m \le l$, נקבל: $\lambda_e(v) \le m+2 \le l+2$ (מ.ש.ל.)

<u>סיבוכיות</u>

$O(|E|)$ - ראה למעלה (בהוכחה שלכך שהאלגוריתם עוצר)