# אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגול מס׳ 10 (חורף 02׳)

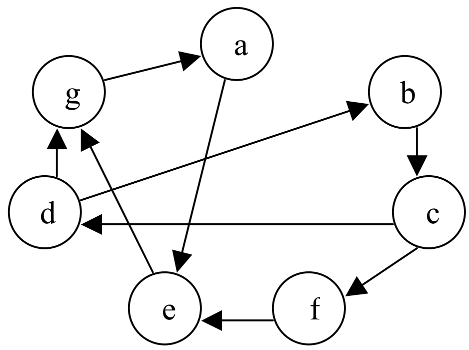
# נושא התרגול: DFS בגרף מכוון ורכיבים קשירים היטב

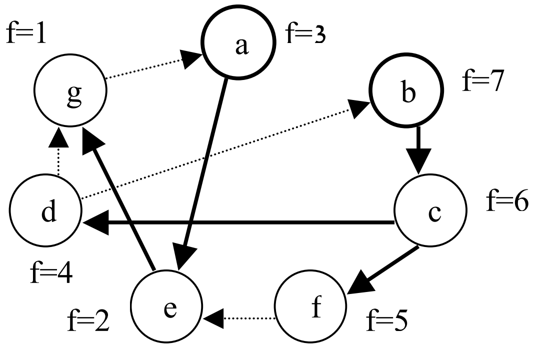
**<u>הגדרה</u>**

רכיב קשיר היטב נקרא <u>מקור</u> (<u>בור</u>) אם אין קשתות הנכנסות (יוצאות) אליו מרכיב אחר.

**<u>אלג׳ Kosaraju-Sharir למציאת רכיבים קשירים היטב – דוגמא</u>**

1. נריץ DFSB על הגרף G (סדר הצמתים ע״פ א״ב) ונקבל:

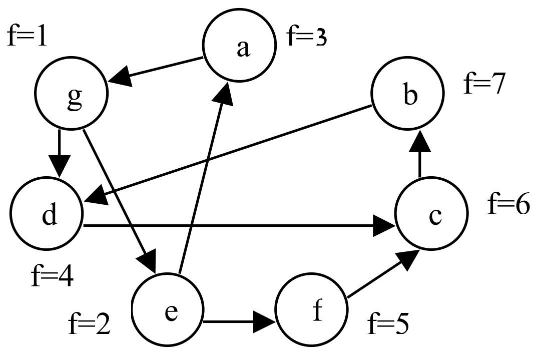


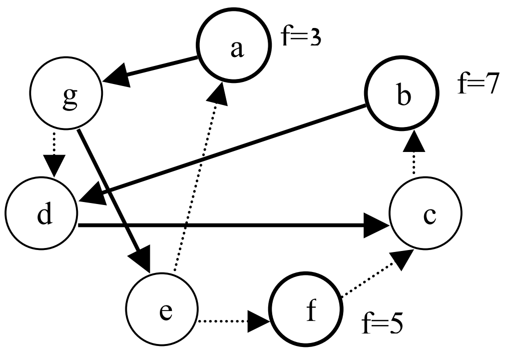




**<u>הערות</u>**

- הסימון ש-DFSB נותן הינו ע״פ סדר <u>נסיגה</u>.
- מתקבל <u>יער</u> (לא בהכרח עץ) DFS.
- רכיבי מקור יתגלו בסוף החיפוש (הזכרו במיון טופולוגי). באופן ספציפי, אם קיים שורש ב-$G$, אזי הצומת שסומן אחרון הינו שורש.

2. נבנה את $G^R$ מתוך $G$ ע״י היפוך קשתות. רכיבי מקור הופכים לרכיבי בור ולהיפך.
3. נריץ DFSA על $G^R$. בכל שלב נבחר צומת עם סימון מקסימלי מבין הצמתים הנותרים (זהו <u>בור</u> בגרף שנותר), נריץ ממנו DFS ונקבל רכיב קשיר היטב.

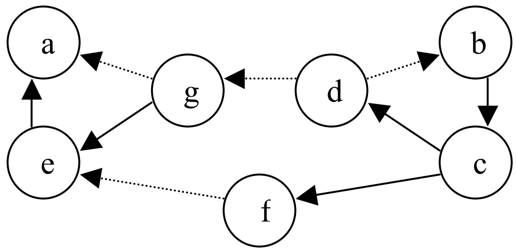


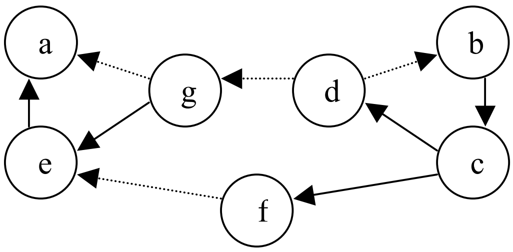

הרכיבים הקשירים היטב המתקבלים הם: $\{b,d,c\},\{f\},\{a,g,e\}$

שימו לב להבדלים בין היערות שהתקבלו בשני המקרים :

**2 עצים ביער**




**3 עצים ביער**




רק ביער השני יש הפרדה בין רכיבים קשירים היטב !

## תרגיל 1

נתון גרף מכוון $G$ עליו הורץ אלגו׳ Kosaraju-Sharir למציאת רכיבים קשירים היטב. נסמן :

$N_B$ - מספר העצים שהתקבלו בהרצת DFSB על $G$.

$N_A$ - מספר העצים שהתקבלו בהרצת DFSA על $G^R$.

הוכח : $N_A \geq N_B$

## הוכחה

הרעיון : מנכונות Kosaraju-Sharir מספר העצים שהתקבלו בסוף ריצת האלגוריתם ($N_A$) שווה למספר הרכיבים הקשירים בגרף. נראה שבכל ריצת DFSB כל הצמתים השייכים לרכיב קשיר היטב נמצאים באותו עץ ביער ה-DFSB. מכאן יתקיים ש : $N_A \geq N_B$

**טענת עזר**

אם שני צמתים שייכים לאותו רכיב קשיר היטב, אז אין מסלול בינהם שעוזב את הרכיב.

**הוכחת הטענה**

יהן $u,v$ שני צמתים הנמצאים באותו רכיב קשיר היטב $C$. לפיכך קיימים מסלולים מכוונים $u \to v, v \to u$. יהא $w$ צומת כלשהו על אחד המסלולים – בה״כ $u \to w \to v$ – ולפיכך קיים מסלול $u \to w$. בנוסף קיים המסלול $w \to v \to u$ ולכן $u,w$ נמצאים באותו רכיב קשיר היטב – $C$.

**ובחזרה להוכחה**

יהא $C$ רכיב קשיר היטב ב-$G$ ויהי $r$ הצומת הראשון שהתגלה ב-$C$. מכיוון ש-$r$ הראשון, שאר הצמתים ב-$C$ לא התגלו עדיין בזמן שהוא התגלה. ע״פ טענת העזר, כל המסלולים לצמתים האחרים ב-$C$ לא יוצאים מ-$C$ ולכן כל הצמתים שעליהם לא התגלו. ע״פ למת המסלול הלבן, כל אחד מהצמתים שב-$C$ יהיה צאצא של $r$ ביער ה-DFS שיתקבל. לפיכך, כולם יהיו באותו העץ.

$N_A$ = DFSA($G^R$) = # רכיבים קשירים היטב ב-$G^R$ = # רכיבים קשירים היטב ב-$G$ $\geq$ DFSB($G$) = $N_B$

$\Uparrow$ אותם רכיבים קשירים היטב

$\Uparrow$ כל הצמתים של אותו רכיב נמצאים באותו עץ

קשירים היטב נמצאים באותו עץ.

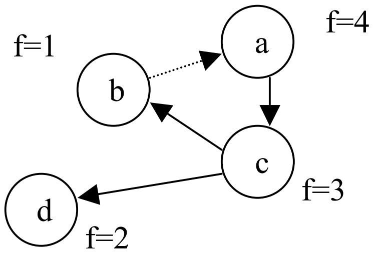
## **תרגיל 2**

### **שאלה 1**

יהי $C$ רכיב קשיר היטב שהינו <u>מקור</u> בגרף. האם המספור שניתן ע"י DFSB לצמתים ב-$C$ תמיד רציף ?

### **תשובה 1**

לא! לדוגמא :




### **שאלה 2**

יהי $C$ רכיב קשיר היטב שהינו <u>בור</u> בגרף. האם המספור שניתן ע"י DFSB לצמתים ב-$C$ תמיד רציף ?

### **תשובה 2**

כן! כשנגיע לרכיב, ננח דרך צומת $r$, אין דרך לצאת ממנו עד לאחר שעברנו על כל הצמתיםשברכיב, וזאת מכיוון שקיים מסלול מכוון מ-$r$ לכל צומת ברכיב, אך לא קיים מסלול מכוון מ-$r$ לצומת שאיננו ברכיב.