אלגוריתמים בתורת הגרפים – פתרון בחן אמצע

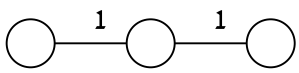
1) נעבור על קשתות הגרף ולכל קשת $e \in E$ נחליף ואתה במסלול שאורכו $w(e)$. נריץ BFS החל מ-s לקביעת המרחקים.
זמן הריצה: שלב ראשון לוקח $O(5\cdot|E|) = O(|E|)$ כי $w(e) \le 5$. גם הצעד השני לוקח אותו זמן (כיוון שגרף התשתית קשיר $|E| \ge |V|-1$. לפיכך, BFS יעשה ב- $O(|E|)$).
בסה״כ: $O(|E|)$.

2)

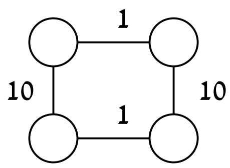
א) הטענה נכונה. הוכחה:
יהי T עפ״מ כלשהו בגרף. נניח שקיים עפ״מ אחר T'. תהי e קשת ב-T שאיננה ב- T'. e קשת במשקל מינימלי בחתך המושרה ע״י הסרתה מ-T. יהי C המעגל הנוצר ע״י הוספת e ל- T'. ב-C קיימת קשת נוספת – e' – בחתך הנ״ל. ע״פ הנתון, משקלות הקשתות שונים זה מזה ולכן $w(e') > w(e)$ (e המינימלית בחתך). לכן e איננה קשת במשקל מקסימלי ב-C בסתירה לכך ש- T' עפ״מ.

פתרון נוסף:
בתרגול הראנו כי ניתן למצוא **<u>כל</u>** עפ״מ בגרף ע״י הרצה מסוימת של אלגוריתם Kruskal. כיוון שלכל הקשתות משקל שונה, הרי שסדר מעבר האלגוריתם על הקשתות הינו יחיד ומכאן שבגרף קיים עפ״מ יחיד.

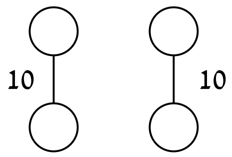
ב) טענה שקרית. דוגמא נגדית:
גרף זה כולל שתי קשתות במשקל זהה אך עפ״מ יחיד.



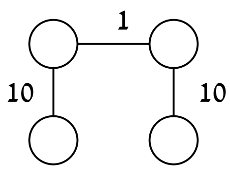
ג) טענה שקרית. דוגמא נגדית:
נחלק את הגרף:



לחלוקה:



ונקבל:



שאיננו עפ״מ.

3)

א) נריץ DFS ונקבל יער DFS. אם יש בגרף שורש, אזי שורש עץ ה-DFS בעל זמן $\text{finish}(v)$ מקסימלי (כלומר שורש העץ שהתקבל אחרון בסריקה) הוא שורש הגרף כולו. כדי לבדוק זאת, נריץ שוב DFS (או BFS) מצומת זה ונבדוק אם הגענו לכל הצמתים: אם כן – נודיע כי זהו השורש, ואם לא – נודיע כי אין שורש בגרף.
זמן הריצה – פעמיים DFS – $O(|E|+|V|)$.

ב) אחרי שמצאנו שורש אחד בגרף בסעיף הקודם, צריך לבדוק מאילו צמתים בגרף ניתן להגיע לשורש זה – אלו כל השורשים בגרף. אפשר למצוא צמתים אלו ע״י הפיכת כיוון הקשתות בעץ והרצת DFS (או BFS) מהשורש הראשון.
זמן הריצה: $O(|E|+|V|)$ למציאת השורש הראשון, ו- $O(|E|+|V|)$ להרצת DFS על הגרף ההפוך. בסה״כ: $O(|E|+|V|)$.