

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
סמסטר חורף תשס"ב

המרצים: אנה מוס, יובל רבני (מרצה אחראי), מוני שחר.
המתרגלים: אייל אקרמן, אילן גרונאו, תמיר היימן, דורון ליפסון (מתרגל אחראי), אורי קוטק, יאיר קורן.

אלגוריתמים בתורת הגרפים (234246)
בוחרן אמצע

הנחיות:

1. משך הבחינה: שעה וחצי.
2. אסור להשתמש בחומר עזר כלשהו.
3. שימו לב: יש שלוש שאלות.
4. בחישוב הציון נצבור נקודות מכל התשובות הנכונות.
5. ציון הבחינה הוא המינימום בין סך הנקודות לבין 100.
6. ענו בקיצור.
7. על מנת להפריך טענה, די בדוגמה נגדית.
8. בהוכחות אפשר להסתמך על כל טענה שנלמדה בשיעור או בתרגול.
9. אין צורך להוכיח טענות, אלא אם כן השאלה דורשת זאת במפורש.

בהצלחה!

1. נתון גרף $G(V, E)$ מכוון וקשיר ופונקציה משקל על הקשתות $W : E \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (כלומר, משקלה של כל קשת הוא מבין הערכים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), וצומת $s \in V$. תנו אלגוריתם, שיעילותו $O(|E|)$, שמוצא את משקל המסלול הקל ביותר מ- s לכל צומת אחר בגרף. (36 נקודות)

2. יהי $G(V, E)$ גרף קשיר ולא מכוון. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם לכל קשת ב- E משקל שונה, אזי ל- G יש עץ פורש מינימום (עפ"מ) יחיד. (12 נקודות)

ב. אם קיימות ב- E שתי קשתות במשקל שווה אזי ל- G יש לפחות שני עפ"מים שונים. (12 נקודות)

ג. נבנה עץ T באופן הבא:

(1) נחלק את V לשתי קבוצות צמתים זרות, V_1, V_2 , המשרות על G את תתי-הגרף G_1, G_2 .

(2) נמצא ב- G_1, G_2 עפ"מים T_1, T_2 בהתאמה (באמצעות אלגוריתם Kruskal, לדוגמא).

(3) נסמן ב- e את קשת מינימלית בחתך (V_1, V_2) ב- G .

(4) נבנה את $T : T = T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$.

הטענה: T הוא עפ"מ. (12 נקודות)

3. נתון גרף מכוון $G(V, E)$.

שורש בגרף הוא צומת ממנו קיים מסלול מכוון לכל הצמתים האחרים בגרף.

א. תנו אלגוריתם ב- $O(|E| + |V|)$ שמוצא שורש בגרף או מודיע שאין כזה. (24 נקודות)

ב. תנו אלגוריתם ב- $O(|E| + |V|)$ שמוצא את כל השורשים בגרף. (12 נקודות)