אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגיל מס' 4

זמן הגשה: 31/1, 12 בצהרים
מתרגל אחראי: איל אקרמן (ackerman@cs)

1) תן אלגוריתם שבהנתן רשת זרימה מוצא קשת שהגדלת קיבולה מגדילה את זרימת המקסימום ברשת, או מודיע שאין קשת כזו. הוכח נכונות ונתח סיבוכיות.
<u>רמז</u>: מצא חתך מינימום "קרוב ל-s" וחתך מינימום "קרוב ל-t".

2) יהא $G(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר. <u>חתך בקשתות</u> ב-G הינו קבוצת קשתות $E' \subseteq E$ כך שהגרף $G'(V, E \setminus E')$ אינו קשיר. במילים אחרות, הסרת קבוצת הקשתות E' מפרקת את G.
הראה אלגוריתם יעיל למציאת חתך בקשתות ב-G בגודל מינימלי, ונתח את סיבוכיותו.

3) נתונה קבוצה U של גברים וקבוצה V של נשים וכן יחס ההכרות בינהם E כך ש- $(u,v) \in E$ אס"ם הגבר $u \in U$ והאישה $v \in V$ מכירים. ברצוננו למצוא <u>שידוך מקסימום</u> בין הגברים לנשים, כלומר קבוצה גדולה ככל האפשר של זוגות כך שכל גבר/אישה משודכים לבן-זוג אחד לכל היותר, ובני הזוג מכירים זה את זו.
הראה אלגוריתם יעיל (בזמן פולינומי) למציאת <u>שידוך מקסימום</u>.
<u>רמז</u>: רדוקציה לבעית זרימה.

4) הוכח או הפרך:
יהא G גרף לא מכוון וקשיר ויהי x צומת של G. הצומת x הוא צומת הפרדה ב-G אסם בכל ריצת DFS על G החל מצומת r ששונה מ-x קיימת קשת עץ (x,y) כך שאין ב-G מעגל פשוט שמכיל צאצא של y וגם אב-קדמון ממש של x (כלומר, אב-קדמון שאיננו x עצמו).

5) נתון גרף עליו הורץ האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב.
רכיב קשיר היטב נקרא <u>רכיב מקור</u> אם אין קשתות אל צמתיו היוצאות מצומת שברכיב אחר.
רכיב קשיר היטב נקרא <u>רכיב בור</u> אם אין קשתות היוצאות מצמתיו אל צומת שברכיב אחר.
לגבי הטענות הבאות – הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית:

א) נסמן ב- N_B את מספר העצים שהתקבלו בהרצת ה-DFS הראשונה על הגרף $\mathrm{DFS}(G)$ וב- N_A את מספר העצים שהתקבלו בהרצת ה-DFS השניה על הגרף ההפוך $\mathrm{DFS}(G^R)$.
האם תמיד מתקיים:
1) $N_B \le N_A$?
2) $N_B \ge N_A$?

ב) יהי C רכיב קשיר היטב שהינו <u>מקור</u> בגרף. האם סדר גילוי הצמתים ב-C ע"י DFS הוא תמיד רציף?

ג) יהי D רכיב קשיר היטב שהינו <u>בור</u> בגרף. האם סדר גילוי הצמתים ב-D ע"י DFS הוא תמיד רציף?