

אלגוריתמים בתורת הגרפים - חורף תשס"ב

פתרון תרגיל בית מספר 3

שאלה 1

האלגוריתם (מבוסס על DFS לגרף מכוון) :

- א. הרץ DFS על הגרף המכוון. עבור כל צומת v סמן ב- $f(v)$ את זמן סיום סריקת הצומת.
- ב. סדר את הצמתים ע"פ סדר $f(v)$ יורד.

הוכחת נכונות:

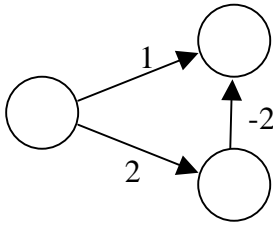
את ההוכחה המלאה לאלגוריתם למיון טופולוגי ניתן בתרגול (תרגול 8).
הרצת DFS על גרף לא מכוון נותנת יער DFS. שימו לב לכך שעבור כל שני צמתים u, v מתקיים ש- $f(u) < f(v)$ רק אם u נמצא מתחת v בעץ DFS מסויים (כלומר קיים מסלול $u \rightarrow v$ בגרף ולא קיים מסלול $v \rightarrow u$ כי הגרף חסר מעגלים), או ש- v נמצא בעץ נפרד מ- u ביער (ואז לא יתכן שקיים מסלול $u \rightarrow v$ בגרף כי אז v היה מתחת u בעץ).
לפיכך, אם קיים מסלול $v \rightarrow u$ בהכרח יתקיים ש- $f(u) < f(v)$.

ניתוח סיבוכיות:

ניתן לסדר את הצמתים ע"פ סדר $f(v)$ יורד תוך כדי הרצת ה-DFS (כל פעם שמסיימים לעבור על צומת מוסיפים אותו לרשימה) ולכן סיבוכיות האלגוריתם היא כסיבוכיות DFS: $O(|E|+|V|)$

שאלה 2

א. דוגמא נגדית:



ב. נשתמש באלגוריתם דמוי Dijkstra בשינוי הבא:

תחילה נריץ את האלגוריתם משאלה 1 למציאת מיון טופולוגי. סדר כניסת הצמתים לקבוצת הצמתים הקבועים יהיה על פי סדר המיון הטופולוגי.

הוכחת נכונות

נוכיח באינדוקציה על סדר כניסת הצמתים לקבוצת הקבועים.

הנחת האינדוקציה – כל הצמתים שעד עכשיו נכנסו לקבועים קיבלו סימון שווה למרחק מ-s.

בסיס:

$\lambda(s) = 0$. הוא הצומת הראשון שיבחר כי הוא שורש ולכן היחיד בעל דרגת כניסה 0. מרחקו מ-s הוא אכן 0.

צעד:

נניח שכל הצמתים שנכנסו לקבוצת הקבועים עד האיטרציה ה-k מקיימים את הנחת האינדוקציה ונתבונן בצומת v שעומד להיכנס לקבוצת הקבועים באיטרציה ה-k+1. כל הקשתות הנכנסות לצומת v מגיעות מצמתים שכבר ביקרנו בהם (מכיוון שעוברים על הצמתים בסדר של מיון טופולוגי), ולכן סימונם שווה למרחק מ-s. המרחק של v מ-s שווה ל- $\min_{u \in \{u \mid (u,v) \in E\}} (\lambda(u) + w(u,v))$, וזהו אכן ערכו של $\lambda(v)$. לאחר שכל שכניו עדכנו אותו בעת כניסתם לקבוצת הקבועים.

ניתוח סיבוכיות

$O(E + V)$	1. מיון טופולוגי
$O(E + V)$	2. מכיוון שכל קשת נבדקת פעם אחת ועוברים על כל הצמתים:
$O(E + V)$	סה"כ

שאלה 3

א. נראה אלגוריתם דמוי קרוסקל. ניתן גם להשתמש בווריאציה על פריים.

- סדר את קשתות הגרף בסדר יורד.
- $E' \leftarrow \phi$.
- לכל אחת מהקשתות על פי סדרן:
- אם הקשת אינה סוגרת מעגל הוסף אותה ל- E' .

הוכחת נכונות

הוכחה באינדוקציה על סדר כניסת הקשתות לעץ.

הנחת האינדוקציה: E' הינה תת עץ של עץ פורש מקסימום כלשהו בגרף.

בסיס:

בתחילת האלגוריתם אין אף קשת ב- E' , וזהו אכן תת עץ של עץ פורש מקסימום.

צעד:

נניח שכל הקשתות עד האיטרציה ה- k מהוות תת עץ של עץ פורש מקסימום T . נתבונן בקשת $e = (a, b)$ שתיכנס ל- E' באיטרציה ה- k .

אם $e \in T$ הוכחנו.

אחרת, נגדיר קבוצת צמתים:

$$A = \{v \mid \text{There is a path in } E' \setminus \{e\} \text{ between } a \text{ and } v\}$$

ונתבונן בחתך $(A : \bar{A})$. ב- T קיימת קשת שונה מ- e בחתך מכיוון ש- T קשיר וקיים מסלול ב- T בין a ל- b . משקל קשת זו קטן או שווה למשקל e , אחרת קשת זו היתה כבר ב- E' כי עוברים על הקשתות על פי סדר משקלים יורד. אם נוריד קשת זו ונוסיף את e נקבל עץ פורש מקסימום חדש. הוכחנו שבכל מקרה E' הוא תת עץ של עץ פורש מקסימום כלשהו.

סיבוכיות

זהה לסיבוכיות קרוסקל: $O(|E| \log |E|)$.

- לא קיים אלגוריתם דומה לאלגוריתם Dijkstra למציאת מסלול כבד ביותר שכן אם היה כזה ניתן היה להשתמש בו לבדוק כיום מסלול המילטוני בגרף, ובעיה זו מוכחת להיות בעלת סיבוכיות אספוננציאלית (NP). ההבדל בין מקרה זה למציאת עץ פורש בעל משקל מקסימלי הוא שמספר הקשתות בעץ פורש (מינימום או מקסימום) הוא קבוע $(|V|-1)$ ולכן ניתן לעבור מבעית מקסימום לבעית מינימום באופן ישיר ע"י שינוי פונקציית המשקל (לדוגמא, ע"י הפיכת הסימן של כל המשקלות בגרף). לעומת זאת, מספר הקשתות במסלול קל/כבד ביותר אינו קבוע ולכן לא ניתן לעבור באופן ישיר מבעית מקסימום לבעית מינימום.

שאלה 4

א. נוכיח תחילה שבסיוס הריצה מתקבל עץ פורש:

האלגוריתם מסתיים כאשר קיים רכיב קשירות אחד, כלומר T קשיר. בנוסף, כל קשת שמתווספת מאחדת שני רכיבי קשירות. מכיוון שמתחילים עם $|V|$ רכיבי קשירות, הוספנו $|V|-1$ קשתות. לא יתכן שהוספת קשת יצרה מעגל. נניח בשלילה שבאיטרציה מסוימת נוצר מעגל. נתבונן בקשת e' שסגרה את המעגל. ברור שקשת נוספת במעגל e' התווספה באיטרציה זו, אחרת בחרנו קשת בתוך אותו רכיב קשירות. נסמן את רכיב הקשירות שבחר את e' ב- X , ואת רכיב הקשירות בו פוגעת e' מצידה השני ב- Y .
 e לא נבחרה על ידי X כי e' נבחרה על ידי X .
 e לא נבחרה על ידי Y – אם כך היה, היתה e מחברת בין Y לרכיב קשירות אחר Z ו- e לא היתה סוגרת מעגל (מכיוון שמשקל כל קשת שונה, ברור ש- e לא מחברת בין X ל- Y מכיוון שאם אכן משקלה קטן ממשקל e' היא היתה נבחרת על ידי X).
 e לא נבחרה על ידי רכיב קשירות אחר, שפוגע ב- X או ב- Y , אחרת לא היה נסגר מעגל. קיבלנו סתירה כי אף רכיב קשירות לא בחר את e .
 E' הוא תת גרף קשיר, חסר מעגלים ובעל $|V|-1$ קשתות, לכן הוא עץ פורש.

נוכיח כעת ש- E' הוא עפ"ם:

הוכחה באינדוקציה על מספר האיטרציות:

הנחת האינדוקציה:

בכל צעד E' הוא תת עץ של עפ"ם ב- G .

בסיס:

בתחילת האלגוריתם E' ריק, ואכן הוא תת עץ של עפ"ם.

צעד:

נניח ש- E' באיטרציה ה- k הוא תת עץ של עפ"ם T' . באיטרציה ה- $k+1$:
בין כל שני רכיבי קשירות לא יתכן שיתווספו שתי קשתות שונות, כי האלגוריתם אינו סוגר מעגלים.

כל קשת שמתווספת $e=(a,b)$ היא הקלה ביותר בחתך $(A: \bar{A})$, כאשר A מוגדר כך:

$$A = \{v \mid \text{There is a path in } E' \setminus \{e\} \text{ between } a \text{ and } v\}$$

ולכן, באמצעות המשפט: בהינתן קבוצה A חלקית ל- V , ו- e הקשת המינימלית מבין הקשתות עם קצה אחד ב- A והשני ב- $V \setminus A$, קיים עפ"ם כך ש- e שייכת אליו (אבן, משפט 2.3), נובע ש- e שייכת ל- T' . T' יחיד מכיוון שמשקלי כל הקשתות שונים זה מזה.

ב. במקרה הגרוע בכל איטרציה כל שני רכיבי קשירות מתאחדים זה עם זה ומספר הרכיבים קטן פי 2. לכן מספר האיטרציות הוא $O(\log|V|)$.

ג. נשתמש במבנה נתונים Union-Find שמאפשר מיזוג קבוצות בצורה יעילה. כל רכיב קשירות ייוצג על ידי קבוצה של צמתים, שכל אחד מהם שומר רשימה של שכניו. בכל איטרציה נעבור בכל קבוצה על כל רשימות הקשתות ונבחר את הקשת הקלה ביותר. לאחר מכן נאחד כל שתי קבוצות שבחרנו קשת ביניהן.

ניתוח סיבוכיות:

1. אתחול מבנה הנתונים	$O(E + V)$
2. איתור הקשתות הקלות בכל האיטרציות:	$O(\log V * E)$
3. איתור ומיזוג כל קבוצות הצמתים בכל האיטרציות – בסה"כ נמזג $ V -1$ קבוצות. פעולת איתור או מיזוג נעשית במבנה נתונים זה ב- $O(\log V)$.	$O(\log V *(V -1))$
<hr/>	
סה"כ	$O(E *\log V)$