אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגיל מס' 3

זמן הגשה: 14/1, 12 בצהרים
מתרגל אחראי: אורי קוטק (skori@cs)

1) <u>מיון טופולוגי</u> של גרף מכוון חסר-מעגלים $G(V,E)$ הוא סידור לינארי T של קבוצת הצמתים V כל שלכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $T(u)<T(v)$ (u מופיעה לפני v בסידור).
הצע אלגוריתם, בסיבוכיות $O(|E|+|V|)$, למיון טופולוגי של גרף מכוון חסר-מעגלים.

2) נתון גרף $G(V,E)$ מכוון חסר-מעגלים, ופונקצית משקל על הקשתות $W:E\rightarrow \mathbf{R}$ (לאו דווקא חיובית). נתון שורש $s\in V$. ברצוננו למצוא את המסלול הקל ביותר בין s לכל $u\in V$.
א) הראה שאלגוריתם Dijkstra אינו עובד במקרה זה (מספיקה דוגמא נגדית).
ב) תאר אלגוריתם, ביעילות דומה ל-Dijkstra, שמוצא את המסלול הקל ביותר בין s לכל $u\in V$.

3) <u>עץ פורש מקסימום</u> הוא עץ פורש בגרף שמשקל קשתותיו מקסימלי מבין כל העצים הפורשים.
א) תן אלגוריתם, ביעילות דומה לאלגוריתם למציאת עץ פורש מינימום, למציאת עץ פורש מקסימום בגרף.
ב) האם ניתן למצוא אלגוריתם ביעילות דומה לזו של אלגוריתם Dijkstra למציאת מסלולים בעלי משקל <u>מקסימלי</u> בגרף מצומת נתון? מהו ההבדל בין מקרה זה לזה שתואר בסעיף א?

4) נתון האלגוריתם הבא, למציאת עץ פורש מינימום בגרף $G(V,E)$ ממושקל, כשמשקלי הקשתות בגרף שונים זה מזה.
<u>אתחול</u>: $T(V,E')$ ריק, כלומר $E'=\phi$
<u>לולאה</u>: כל עוד T מכיל יותר מרכיב קשירות יחיד
- לכל רכיב קשירות T_i ב-T, מצא ב-G את הקשת הקלה ביותר שיוצאת מ-T_i
- צרף ל-T את כל הקשתות שמצאת בשלב הקודם. (שים לב כי יתכן שאותה קשת תבחר עבור שני רכיבי קשירות שונים. במקרה זה, נוסיף אותה ל-T פעם אחת בלבד.)

א) הוכח כי בסיום ההרצה, T הינו עץ פורש מינימום ב-G.
ב) כמה פעמים נחזור על הלולאה באלגוריתם, במקרה הגרוע ביותר?
ג) הצע יישום של האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.