אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגיל מס' 2

זמן הגשה: 23/12, 12 בצהריים
מתרגל אחראי: אילן גרונאו (shrilan@t2.technion.ac.il)

1) גרף **דו-צדדי** (bipartite) הינו גרף $G(V,E)$ אשר קיימת חלוקה של צמתיו לשתי קבוצות U,W ($U \cup W = V, U \cap W = \phi$) כך שכל קשת $e \in E$ הינה מצורת $e=(u,w)$ או $e=(w,u)$ כאשר $u \in U, w \in W$.
   א) מצא תנאי מספיק והכרחי לכך שגרף לא-מכוון הוא דו-צדדי.
   ב) הראה אלגוריתם יעיל שבודק אם גרף הוא דו-צדדי ואם כן מציע חלוקה U,W מתאימה.
   ג) נתח את סיבוכיות האלגוריתם שהצעת.

2) **קוטר** הגרף הינו המקסימום מבין המרחקים המינימליים בין זוגות צמתים בגרף.
   א) מצא אלגוריתם יעיל לחישוב הקוטר של עץ לא-מכוון.
   ב) נתח את סיבוכיות האלגוריתם שהצעת.

3) נתון גרף G אשר כל אחת מקשתותיו צבועה באדום או שחור, , וצומת $s \in V$.
   א) הראה אלגוריתם, שיעילותו $O(|E|+|V|)$, המוצא לכל צמת v בגרף את המסלול הקצר ביותר מ-s העובר בקשת אדומה אחת לפחות.
   ב) הראה אלגוריתם, שיעילותו $O(|E|+|V|)$, המוצא לכל צמת v בגרף את המסלול הקצר ביותר מ-s העובר בקשת אדומה אחת בדיוק.

   רמז: השתמשו ברדוקציה ל-BFS. (רדוקציה הינה טרנספורמציה של בעיה נתונה לבעיה אחרת, שאת פתרונה ניתן לתרגם לפתרון הבעיה המקורית).

4) **שורש** בגרף מכוון הינו צומת בגרף ממנו קיים מסלול מכוון לכל הצמתים בגרף.
   א) נתון גרף מכוון $G(V,E)$. הצע אלגוריתם שסיבוכיותו $O(|E|)$ המוצא שורש ב-G, או מודיע שאין כזה.
   ב) הוכח את נכונות האלגוריתם.

5) **רכיב קשיר-היטב** בגרף מכוון $G(V,E)$ הינו תת-קבוצה של צמתים $V' \in V$ כך שלכל זוג צמתים ברכיב $u,v \in V'$ קיימים ב-G מסלולים מכוונים $u \to v$, $v \to u$.
   א) מצא אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים-היטב בגרף מכוון, שיעילותו $O(|E|+|V|)$.