

אלגוריתמים בתורת הגרפים – תרגיל מס' 1

זמן הגשה: 12, 12/11 בצהריים
מתרגל אחראי: יאיר קורן

(1) נתונה מטריצת הסמיכויות הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (א) צייר את הגרף ש- A מייצגת.
(ב) חשב את A^2 והסבר מה מייצג כל איבר בה.
(ג) מה המשמעות של כל איבר במטריצה A^k ? הוכח (באינדוקציה על k).
- (2) יהי G גרף מכוון. G הוא עץ מכוון אם קיים בו שורש r וגרף התשתית שלו הוא עץ. הוכח את שקילות התנאים הבאים:
- (א) G הוא עץ מכוון.
(ב) קיים ב- G שורש r ממנו קיים מסלול יחיד לכל צומת ב- G .
(ג) קיים ב- G שורש r שדרגת הכניסה שלו $d_{in}(r) = 0$ ולכל צומת אחר v : $d_{in}(v) = 1$.
(ד) ב- G יש שורש r ומחיקת כל קשת אחת מ- G פוגעת בתכונה זו.
(ה) גרף התשתית של G קשיר וב- G יש צומת r שדרגת הכניסה שלו $d_{in}(r) = 0$ ולכל צומת אחר v : $d_{in}(v) = 1$.
- (3) שאלה זו עוסקת בתנאים לקיום מסלול/מעגל אוילר בגרף מכוון:
- (א) הוכח כי גרף מכוון מכיל מעגל אוילר אם"ם הוא מקיים את התנאים הבאים:
- (i) גרף התשתית שלו קשיר.
(ii) כל צומת v בגרף מקיים $d_{in}(v) = d_{out}(v)$
- (ב) מהם התנאים לקיום מסלול אוילר בגרף מכוון (שאיננו מעגל)?
- (4) נתון גרף G לא-מכוון שקשתותיו צבועות באדום, כחול וירוק. מסלול אוילר משתנה ב- G הוא מסלול אוילר ב- G כך שכל שתי קשתות עוקבות בו הן בעלות צבע שונה.
- (א) מצא תנאי מספיק והכרחי לקיום מסלול אוילר משתנה ב- G .
(ב) הוכח כי התנאי הכרחי.
(ג) הוכח כי התנאי מספיק (רמז: הוכחה אלגוריתמית).
- (5) מסלול המילטוני הוא מסלול שעובר בכל צומת בגרף פעם אחת בדיוק. הוכח כי בכל גרף פשוט שהדרגה המינימלית $\delta \geq n/2$ ($n = |V|$) קיים מסלול המילטוני.