אלגוריתמים בתורת הגרפים (234246) – סמסטר חורף תשס"ב
פתרון מבחן סופי מועד א'

1. נתון גרף $G(V,E)$ לא מכוון עם פונקצית משקל $w:E\to R$ על הקשתות.
לכל מסלול p בגרף נגדיר:
$l(p)$ - אורך המסלול, כלומר מספר הקשתות בהן עובר p.
$w(p)$ - משקל המסלול, כלומר סכום משקלי הקשתות בהן עובר p.
עבור זוג צמתים $s,t\in V$ **מסלול קצר קל ביותר** מ-s ל-t הוא מסלול p המקיים:
לכל מסלול q מ-s ל-t: $l(p)<l(q)$ או ($l(p)=l(q)$ וגם $w(p)\le w(q)$)
תארו אלגוריתם המחשב מסלול קצר קל ביותר מצומת נתון s לכל צומת v בגרף, שסיבוכיותו $O(|E|+|V|)$. שימו לב כי פונק' המשקל איננה חיובית בהכרח. **(24 נקודות)**

פתרון

שימו לב כי מסלול קצר קל ביותר הוא בפרט מסלול קצר ביותר. נשתמש בוריאציה על BFS. השינויים:

לכל צומת v נחזיק, בנוסף למשתנים $d(v)$ (אורך מסלול קצר מ-s) ומצביע $p(v)$ (ההורה על המסלול), משתנה נוסף – $w(v)$ – שיחזיק את משקל המסלול הקצר הקל ביותר.

נאתחל $w(s)=0$, $\forall v\neq s \quad w(v)=\infty$

באיטרציה ה-i אנו מוציאים מהתור צומת u שמרחקו מ-s הוא $d(u)=i-1$ ובודקים את שכניו.
לכל קשת $e=(u,v)$ נבדוק את הצומת השכן v:
אם $d(v)>i$ נעדכן: $d(v)=i,\quad p(v)=u,\quad w(v)=w(u)+w(e)$
אם $d(v)=i$ וגם $w(v)>w(u)+w(e)$ נעדכן: $p(v)=u,\quad w(v)=w(u)+w(e)$

בסיום הריצה עבור כל צומת v $w(v)$ מכיל את משקל המסלול הקצר הקל ביותר מ-s ל-v. ניתן לשחזר את המסלול הקצר הקל ביותר ע"פ ערכי המצביעים.

סיבוכיות: כמו BFS: $O(|E|+|V|)$

2. נתון גרף מכוון עם פונקצית משקל חיובית על הקשתות, וזוג צמתים $s,t \in V$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

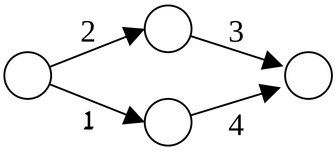
א. אם לכל הקשתות יש משקלים שונים, אזי בין כל זוג צמתים בגרף קיים מסלול קל ביותר יחיד. **(8 נקודות)**

ב. אם המשקל של כל קשת בגרף יגדל ב-k, אזי משקל המסלול הקל ביותר בין s ל-t בהכרח יגדל בכפולה שלמה של k. **(8 נקודות)**

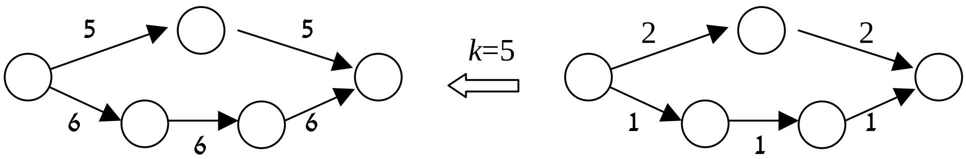
ג. אם המשקל של קשת כלשהי בגרף יקטן ב-k, אזי משקל המסלול הקל ביותר בין s ל-t יקטן ב-k לכל היותר. **(8 נקודות)**

<u>פתרון</u>

א. הטענה שקרית:



ב. הטענה שקרית:



ג. הטענה נכונה:

מסלול קל ביותר בין זוג צמתים הינו מסלול פשוט ולכן יעבור בכל קשת פעם אחת לכל היותר. כל מסלול פשוט בגרף שעובר בקשת שמשקלה הופחת ב-k אזי משקלו יופחת ב-k בדיוק. לפיכך, אורך המסלול הקל ביותר יופחת ב-k לכל היותר.

3. נתון גרף מכוון $G(V,E)$. עבור זוג צמתים $s,t\in V$ נגדיר:
$con(s,t)$ (קשירות s,t) - מספר המסלולים הזרים בצמתים מ-s ל-t.
$vul(s,t)$ (פגיעות s,t) - מספר הצמתים המינימלי השונים מ-s,t אותם יש להסיר על מנת שלא יהיה מסלול בין s ל-t בגרף.

א. הראו כי לכל $s,t\in V$ מתקיים $con(s,t)=vul(s,t)$. **(12 נקודות)**

ב. תנו אלגוריתם יעיל (פולינומי) לחישוב $vul(s,t)$ עבור זוג $s,t\in V$ מסוים. **(12 נקודות)**
<u>רמז</u>: העזרו בזרימה

<u>פתרון</u>

פתרון ברדוקציה לרשת זרימה המוגדרת באופן הבא:

גרף $G'=(V',E')$ כאשר

$$V'=\{v_{\text{in}},v_{\text{out}} \mid v\in V\},\quad E'=\{v_{\text{in}}\to v_{\text{out}} \mid v\in V\}\cup\{u_{\text{out}}\to v_{\text{in}} \mid u\to v\in E\}$$

המקור יהיה s_{out} והבור t_{in}

פונקצית הקיבול: $c(v_{\text{in}}\to v_{\text{out}})=1$, $c(u_{\text{out}}\to v_{\text{in}})=\infty$

ברשת זרימה זו מתקיים:

- חתך מינימום = $vul(s,t)$. החתך חייב לחתוך רק קשתות מסוג $v_{\text{in}}\to v_{\text{out}}$, אחרת קיבולו יהיה ∞. קשת $v_{\text{in}}\to v_{\text{out}}$ מגדירה בדיוק צומת v אחד בגרף המקורי.

- זרימת מקסימום = $con(s,t)$. קיימת זרימה כזו בשלמים ולכן קשת $v_{\text{in}}\to v_{\text{out}}$ נושאת לכל היותר מסלול זרימה אחד. לפיכך מסלולי הזרימה זרים בצמתים.

מכאן:

א. $con(s,t)=vul(s,t)$, ע"פ זרימת מקסימום=חתך מינימום.

ב. אלגוריתם Edmonds-Karp מחשב את $vul(s,t)$ בזמן פולינומי.

4. בהנתן עץ מכוון T בעל שורש r וצומת x ב-T **העומק** של x – $depth(x)$ – הינו אורך המסלול המכוון מ-r ל-x. בנוסף, עומק העץ מוגדר להיות $depth(T) = \max_{x \in T}(depth(x))$.

נתון גרף G קשיר ולא-מכוון. הוכיחו או הפריכו:

א. יהא T_D עץ ה-DFS המתקבל עבור גרף G מסוים ו-T_B עץ ה-BFS המתקבל עבור אותו גרף G. בהכרח מתקיים $depth(T_D) \geq depth(T_B)$. **(8 נקודות)**

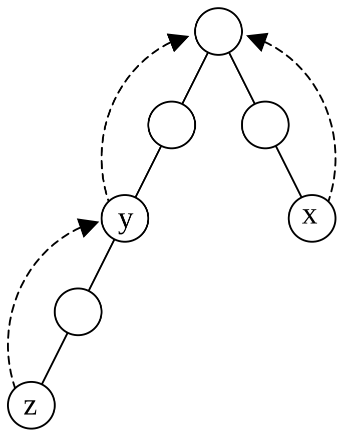
ב. נריץ DFS על G. לכל צומת y נגדיר את $oldest(y)$ להיות האב הקדמון x של y בעל עומק מינימלי, אליו ניתן להגיע מ-y במסלול שעובר במספר כלשהו של קשתות עץ וקשת אחורית אחת לכל היותר.
<u>הטענה</u>: אם y,z נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק, אז $oldest(y) = oldest(z)$ **(8 נקודות)**

ג. אם $oldest(y) = oldest(z)$ אז y,z נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק. **(8 נקודות)**

<u>פתרון</u>

א. הטענה נכונה.

בהנתן צומת x, יהא $b(x)$ אורך המסלול מ-s ל-x ב-T_B, יהא $d(x)$ אורך המסלול מ-s ל-x ב-T_D.
BFS מוצא מסלולים קצרים ביותר ולכן $b(x)$ הינו אורך המסלול הקצר מ-s ל-x. לפיכך $b(x) \leq d(x)$. לכן מתקיים: $depth(T_B) = \max_x b(x) \leq \max_x d(x) = depth(T_D)$



ב. הטענה שקרית

y,z נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק, אבל $oldest(y) \neq oldest(z)$

ג. הטענה שקרית

$oldest(y) = oldest(x)$ אבל x,y לא נמצאים באותו רכיב בלתי-פריק

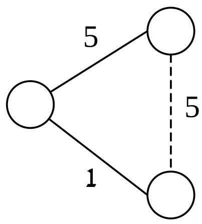
5. יהא G גרף בלתי מכוון עם פונקצית משקל אי-שלילית על הקשתות. **חתך** ב-G הוא חלוקה של קבוצת הצמתים לשתי תת-קבוצות לא-ריקות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהא T עץ פורש מינימום ב-G. תהא F קבוצת קשתות (x, y) המקיימות:
1) (x, y) איננה ב-T.
2) $w(x, y) = w(u, v)$ עבור קשת (u, v) כלשהי על המסלול המקשר בין x ל-y ב-T.
<u>הטענה</u>: אם נוסיף את הקשתות ב-F ל-T ונקבל גרף H, אזי כל עץ פורש של H הינו עץ פורש מינימום ב-G. **(12 נקודות)**

ב. יהא T עץ פורש של G. נגדיר את **קיבולת העץ** T להיות המשקל ה<u>מינימלי</u> של קשת ב-T.
יהא C חתך ב-G. נגדיר את **ערך החתך** C להיות המשקל ה<u>מקסימלי</u> של קשת החוצה את C.
הטענה: מקסימום הקיבולת של עץ פורש ב-G שווה למינימום הערך של חתך ב-G.
(12 נקודות)

<u>פתרון</u>

א. הטענה שקרית.



ב. הטענה נכונה.

יהי T עץ פורש שקיבולתו מקסימלית. כל חתך C חותך לפחות קשת אחת ב-T ולכן ערכו לפחות כקיבולת T.

תהא e קשת ב-T עם משקל מינימלי (כלומר, משקל קשת זו מגדיר את קבולת T). יהי C_e החתך המושרה ע"י קשת זו ב-T. אזי e קשת כבדה ביותר בחתך C_e (אחרת ניתן להגדיל את קבולת T ע"י החלפת קשתות) ולכן הערך של C_e הוא לכל היותר כקיבולת T.

לפיכך, הערך של C_e שווה לקיבולת של T. הערך של כל חתך אחר הוא לפחות כקיבולת T ולכן מינימום הערך של חתך ב-G שווה למקסימום הקיבולת של עץ פורש ב-T.